理论力学

下册

朱照宣
周起钊 编
殷金生

北京大学出版社

理论力学

（下）

朱照宣 周起钊 殷金生 编

北京大学出版社

理论力学（下）

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京新华印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
850×1168毫米 32开本 14印张 356千字
1982年8月第一版 1982年8月第一次印刷
印数：40000册

统一书号：13209·52 定价：1.70元

内 容 提 要

本书前七章是基础部分，包括静力学、运动学、质点和质点系动力学；后三章是专题部分，其中包括分析力学初步。全书共配有二百多个例题，五百多道习题，并附有习题答案。

本书分上下两册出版。全书共需两学期或三学期讲完。

此书可供综合大学或理工科大学力学专业理论力学课程用作教材，也可作为高等工业院校有关专业的教学参考书。

下册目录

第五章　动 量 定 理

在 4–5 中引进了质点的动量定理、动量矩定理和动能定理。我们是从牛顿运动微分方程推导出这三个定理的，即把牛顿定律看成是基本的，而三个定理是派生的。这只是在经典力学的范围内才能做到。其实，从物理学中更一般的意义来说，情况正好相反，在某些经典力学不能应用的物理学领域中，虽然牛顿定律不成立，但是动量守恒、动量矩守恒和能量守恒作为普遍的自然规律依然成立。

由许多质点组成的一个力学系统称为**质点系**。刚体是一种特殊的质点系。原则上说，可以对系中每一个质点列出牛顿运动微分方程，解出全部联立方程，则质点系的动力学问题就全部被解决。然而，实际上这种方法既不现实，也不必要。因为，通常我们并不需要知道质点系中每一个质点的具体运动情况。研究人造卫星在其轨道上的运动时，要知道的是卫星整体的某些运动特征，例如卫星质心的运动轨迹、速度、加速度以及卫星姿态的变化规律等，不必求出卫星上每一质点的运动轨迹。即使要求的话，也只有掌握了整体的运动特征后才能进一步求出任何一点的运动规律。对于一般的质点系也有类似的情况。第五、第六和第七这三章讲的就是有关质点系（包括刚体）整体运动特征的三个物理量及其变化规律。

5–1　外力和内力

质点系中任一个质点所受的力可以分为两类：一类是质点系以外的物体对它的作用力，称为**外力**；另一类是质点系中其他质点对它的作用力，称为**内力**。这两类力对于质点系整体所起的作

用是不相同的。

一个力是"外力"还是"内力"，决定于质点系的范围。分析具体问题时，首先要明确研究对象，即明确所考虑的质点系包括哪些范围，然后才能分清外力和内力。

例5.1 飞石索。两块石头用一绳相连，将它们抛出[①]（图5.1），分析外力和内力。

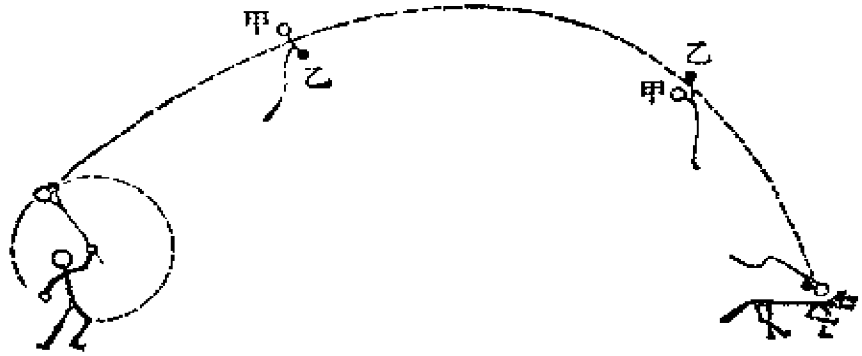


图5.1 只有两个质点的质点系

解 取石头甲为对象，它受到的外力有重力和石头乙通过绳子对它的拉力。因为在飞行中绳子可能时紧时松，所以绳子拉力有时等于零。取石头乙为对象时，情况类似。

取甲乙两石块连同不计质量的绳子作为对象。两石块之间的拉力是内力，作用在两石块上的重力是外力。▌

例5.2 太阳系。设质点系是太阳系全部，即包括太阳、各个行星、小行星、行星的各个卫星等等（图5.2）。

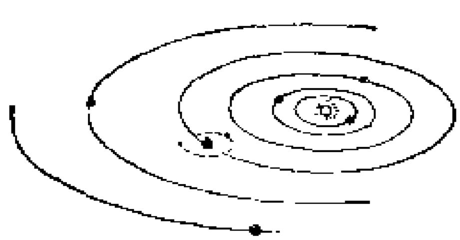


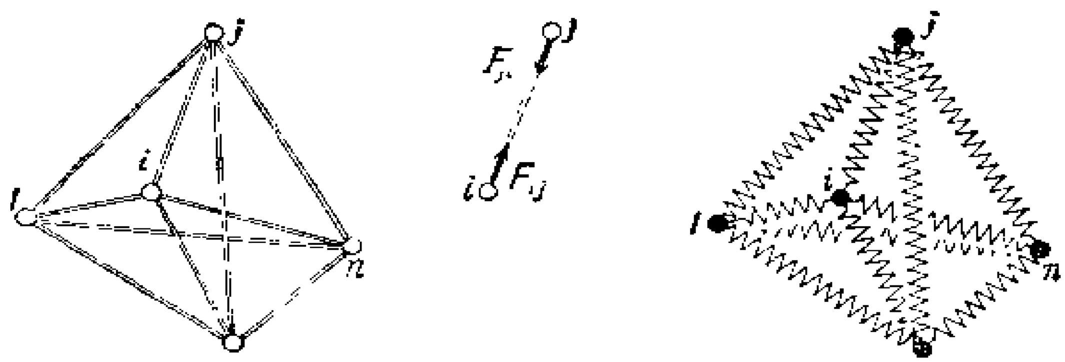
图5.2 不受外力作用的质点系

每一个天体可抽象成一个质点来处理，每两个质点之间作用有万有引力。在上一章讲开普勒问题时，对象是地球或行星，则太阳的引力是外力。对太阳系这个对象来说，系中各个星体之间的引力都是内力，太阳对地球或

① 人类在旧石器时代就用这种飞石索来打击野兽。

行星的引力也是内力。太阳系以外的恒星对它们的引力是外力。最近的恒星离开太阳系的距离也有4.3光年，它的引力可以忽略。因此太阳系可以近似地认为是一个不受外力作用的质点系，称为孤立系统。 ▎

例5.3 刚体和弹性体。刚体是任何两点之间距离保持不变的质点系。设想它由 n 个质点组成，其中每两个质点之间用一根刚性的无质量的连杆连结起来（图5.3(a)），这好象是一个空间桁架（第一章图1.56），在桁架每一个节点处有一个集中质量。



(a) 刚体　　(b) 弹性体

图5.3 离散模型及内力

对于任一个质点 i，它受到的所有外力的合力用 $\boldsymbol{F}_i^{外}$ 来表示。其他质点 j（$j\neq i$）对它的作用力记作 $\boldsymbol{F}_{ij}$，这对刚体来说是内力。$\boldsymbol{F}_{ij}$ 的反作用力记作 $\boldsymbol{F}_{ji}$，它是质点 i 对质点 j 的作用力，也是内力。

假想把上面所说的刚性连杆换成弹性连杆，在某种情况下，这可以作为弹性体的离散化模型（图5.3(b)）。 ▎

刚体和弹性体离散化模型的差别在于：对刚体有

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_{ij})\equiv 0,$$

其中 $\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i$，$\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{r}_j$ 分别是质点 i 和 j 的向径；而弹性体则没有这样的关系。

任何一个质点系的内力有两个重要的性质。

第一，质点系全部内力的主向量等于零。设质点系中共有 n 个质点，作用在第 i 个质点上所有内力之和是

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij},$$

其中当 $i=j$ 时 $\boldsymbol{F}_{ij}=0$。作用在质点系中各质点上的所有内力的主向量为

$$\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{R}=\sum_{j}^{n}\sum_{i}^{n}\boldsymbol{F}_{ji},$$

根据牛顿第三定律，应有

$$\boldsymbol{F}_{ij}=-\boldsymbol{F}_{ji}, \tag{5.1}$$

所以有

$$\sum\sum\boldsymbol{F}_{ij}=-\sum\sum\boldsymbol{F}_{ji},$$

即

$$\boldsymbol{R}=-\boldsymbol{R}.$$

由此即得

$$\boldsymbol{R}=\sum\sum\boldsymbol{F}_{ij}=0. \tag{5.2}$$

这一结论也可以直接论证如下。根据牛顿第三定律，质点系中任意两点之间的相互作用力的向量和为零，因此所有内力的主向量等于零。

第二，全部内力对任一点的主矩① 等于零。任意取一固定点 O，全部内力对该点的主矩为

$$\sum\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}).$$

其中 $\boldsymbol{r}_i$ 为第 i 个质点的向径。因为

① 当质点系是刚体时，它就是第一章所说的主矩，可以进行等价性化简。当质点系不是刚体时，主矩只具有各个内力矩向量和的含义，不允许用刚体静力学中的理论进行化简。

$$\sum\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij})=\sum\sum(\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ji}),$$

所以

$$2\sum\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij})$$
$$=\sum\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij})+\sum\sum(\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ji})。$$

根据式(5.1)得

$$2\sum\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij})=\sum\sum[(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}_{ij}]。$$

在通常情况下，两点之间的作用和反作用力是通过两点间连线的，即有条件

$$\boldsymbol{r}_{ij}\times\boldsymbol{F}_{ij}=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n;\ i\neq j)\qquad(5.3)$$

其中 $\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i$，是由第 i 个质点到第 j 个质点的向量(图5.4)。

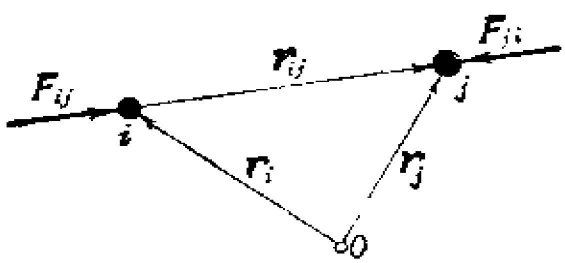


图5.4　内力主矩为零

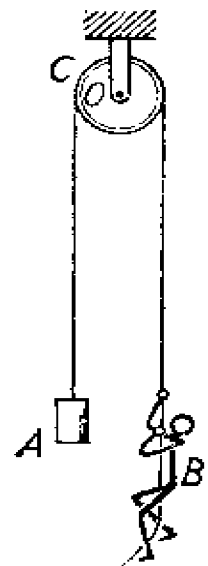


图5.5　适当选取质点系可使外力简化

当条件(5.1)和(5.3)同时被满足时，内力的主矩等于零，即

$$\sum\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij})=0\qquad(5.4)$$

在解决具体问题时，质点系的范围可以根据问题的需要来选定，往往在同一个问题中可能有几种选法，选得合适就可以使问题简化。例如在图5.5所示的情况中，假定绳与滑轮之间有摩擦，

而滑轮支承O是光滑的。可以将人、重物和绳子合在一起当作一个质点系；也可以将人、重物、绳子再加上滑轮合在一起当作一个质点系。显然，对于后一种选法外力比较简单。

5-2 质点系动量定理

现在把 4-5 中质点的动量定理推广到质点系。质点系中各个质点的动量之向量和，称为质点系的动量，记作 $\boldsymbol{p}$，即

$$\boldsymbol{p}=\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i.$$

对于每一个质点，有

$$\frac{d}{dt}(m_i\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{F}_i^{外}+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n;j\neq i).$$

将上式从 $i=1$ 到 $i=n$ 求和，得到

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i\right)=\sum_i\boldsymbol{F}_i^{外}+\sum_i\sum_j\boldsymbol{F}_{ij}.$$

上式右端第一项是作用在质点系上所有外力的主向量，记作 $\boldsymbol{R}$；第二项是内力的主向量，根据式(5.2)，它应为零。因而得出

$$\boxed{\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{R}.}\qquad(5.5)$$

这就是**质点系的动量定理**：质点系的动量对时间的导数等于外力的主向量。可见内力不能影响质点系动量的变化。

将式(5.5)在时刻 t_1 与 t_2 之间积分，得

$$\boxed{\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{R}dt.}\qquad(5.6)$$

这是积分形式的动量定理，等号右边表示外力主向量在这一时间间隔内的冲量，它是质点动力学中式(4.14)的推广。

如果外力的主向量为零，则动量是一个常向量，这就是**动量**

守恒定理。对于孤立系统来说，外力为零，因此动量守恒。

如果外力在某一固定方向上投影的代数和为零，把这个方向取作 x 轴，则有 $R_x = \sum F_x^{外} = 0$，由式(5.5)可知

$$\frac{dp_x}{dt} = 0,$$

即 p_x 为常量，称为某个方向的动量守恒定理。

例5.4 太空中的拔河(图5.6)。



图5.6 甲比乙气力大，结果怎样？

宇航员甲和乙原来在宇宙空间是静止的，两人各自用力拉绳子的一端。设甲能使出的最大拉力大于乙。不计绳子质量，讨论拔河的结果。

解 如果把甲、乙连同绳子一起作为质点系，则它没有外力，所以动量守恒，即在拔河过程中动量保持原来静止时的动量，即

$$m_{甲} v_{甲} + m_{乙} v_{乙} = 0.$$

甲用力拉动乙的同时，甲自己也被乙拉动，两人相向而动且各自的速度大小与其质量成反比。甲对绳的拉力总是等于乙对绳的拉力，因而尽管甲能比乙使出更大的劲，但甲在拔河中无法使出其全部力量，它受到乙的最大拉力的限制。▌

＊＊＊ 自行车在水平路面上由静止出发开始前进(图5.7)。什么力使它有向前的速度？有人回答说，因为人对它作用一个向前的力，这种说法是否对？＊＊＊

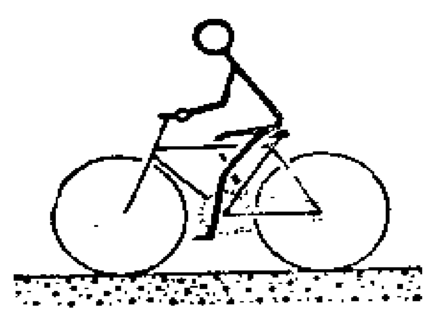


图5.7 自行车靠什么力前进？

例5.5 自动楼梯(图5.8)。

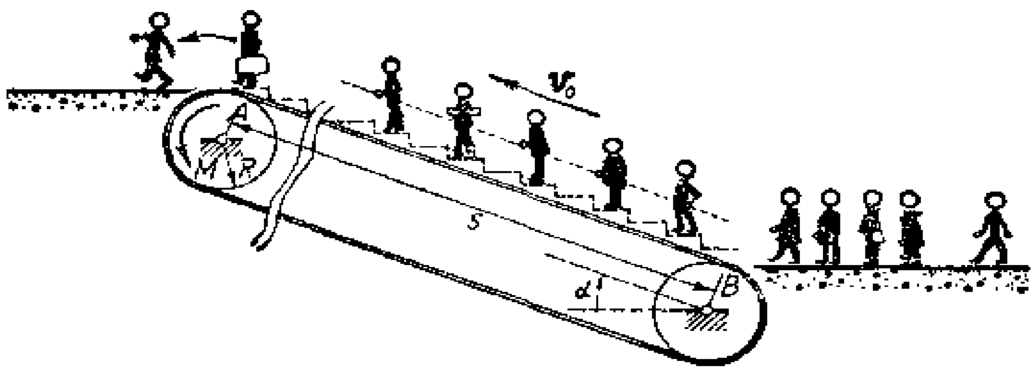


图5.8 求平均力矩 M

传动皮带段 AB 长 s，与水平夹角为 α。梯上等距离地站立 n 个体重均为 P 的乘客。乘客被带到最高点 A 时无相对速度地离开传动带。与此同时，有另一体重相同的乘客无初速地踏上传动带的 B 处。通过半径为 R 的滚轮使传动带保持等速 v_0，求滚轮上所需的平均力矩。

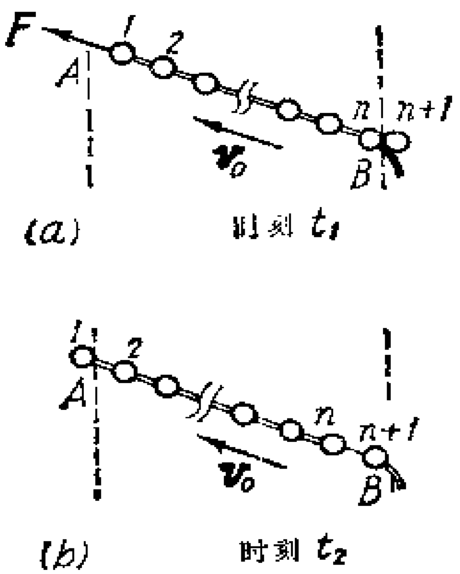


图5.9 时刻 t_1 和 t_2

解 选择在两个时刻 t_1 和 t_2 之间考虑问题。在 t_1 时有一乘客刚离开 A 点（在图5.9(a)中没有画出），在 t_2 时后面一个乘客刚离开 A 点(图5.9(b))尚未落地，同时第 $n+1$ 个乘客已踏上楼梯。在这一时间间隔内，传送带所走的距离为 s/n，它与速度的关系为

$$v_0(t_2-t_1)=s/n。$$

现以皮带段 AB 连同 $n+1$ 个乘客作为我们所考虑的质点系。

在 t_1 时，系统的动量（方向沿皮带）是 nPv_0/g；在 t_2 时，系统沿皮带运动方向的动量是 $(n+1)Pv_0/g$。由动量定理式(5.6)得

$$(n+1)\frac{P}{g}v_0-n\frac{P}{g}v_0-\int_{t_1+0}^{t_2-0}(F-nP\sin\alpha)dt,$$

其中 P 是滚轮对传动皮带的拉力的大小，它是时间 t 的函数。将 F 在 t_1 到 t_2 时间间隔内的平均值记作 F^*，即

$$\int_{t_1+0}^{t_2-0}Fdt=F^*(t_2-t_1),$$

代入上式，解出

$$F^*=nP\left(\frac{v_0^2}{gs}+\sin\alpha\right).$$

因此，所需的平均力矩的大小为

$$M=nPR\left(\frac{v_0^2}{gs}+\sin\alpha\right).$$

这结果可以解释为，在时刻 t_1 梯子上有 n 个乘客，在时刻 t_2 梯子上还是 n 个乘客。虽然不是同样 n 个人，但就整个质点系来说，这一部分动量没有发生变化。变化的是图中第$n+1$个乘客的零动量变为第1个乘客的动量 Pv_0/g。这样，问题的答案就十分明显了。▌

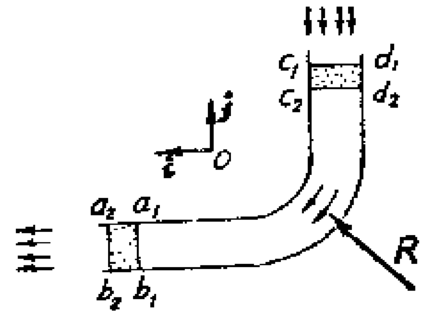


图5.10 弯管反力

例5.6 直角弯管的附加反力（图5.10）。设管道内有不可压缩的流体流动，流动是定常的（管内每一点处液体的速度不随时间变化）。流量[①]是 Q，密度是 ρ。管子截面积是 A。求由于流体的流动，弯管对流体的附加反力 $\boldsymbol{R}$。

解 取管子中占据 $a_1b_1d_1c_1$ 位置那部分流体作为对象（质点系）。设在 t 时刻，这些流体的总动量是 $\boldsymbol{p}_1$；到 $t+\Delta t$ 时刻，这些流体占据 $a_2b_2d_2c_2$ 位置，其动量是 $\boldsymbol{p}_2$。在时间间隔 Δt 内，动量的变化为 $\Delta\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1$。

① 流量是单位时间内流过的流体体积，其量纲是[长度]^3[时间]$^{-1}$。

由于流动是定常的，占据 $a_1b_1d_2c_2$ 位置的那些流体，尽管在两个时刻并不是同一些质点，但是总动量没有改变。所以，$\Delta \boldsymbol{p}$ 实际上就是 $a_1b_1b_2a_2$ 中流体的动量与 $c_1d_1d_2c_2$ 中流体的动量之差。

$a_1b_1b_2a_2$ 和 $c_1d_1d_2c_2$ 中的流体体积都是 $Q\Delta t$，因此它们的质量都是 $\rho Q\Delta t$。因为流体是不可压缩的，所以这两部分流体的平均速度的大小都是 Q/A，但方向不同。取 $\boldsymbol{i}$ 水平向左，$\boldsymbol{j}$ 垂直向上，则得

$$\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\left[(\rho Q\Delta t)\frac{Q}{A}(\boldsymbol{i})\right]-\left[(\rho Q\Delta t)\frac{Q}{A}(-\boldsymbol{j})\right]$$

$$=\rho\frac{Q^2}{A}\Delta t(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})。$$

作用在对象上的力有重力 $\boldsymbol{W}$，两截面 a_1b_1 和 c_1d_1 处流体其他部分对它的作用力 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$，以及弯管的反力 $\boldsymbol{N}$（弯管周壁作用力的合力）（以上几个力在图中未画）。由动量定理有

$$\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{N})\Delta t。$$

设流体静止时弯管反力是 $\boldsymbol{N}_0$，可以把流体运动时的反力 $\boldsymbol{N}$ 分解为 $\boldsymbol{N}_0$ 和 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N}_0$ 两部分，这个 $\boldsymbol{R}$ 是由于流动而引起的附加反力。由静止时平衡条件①得

$$\boldsymbol{W}+\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{N}_0=0,$$

与上式比较，得

$$\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{R}\Delta t,$$

由此得出

$$\boldsymbol{R}=\frac{\rho Q^2}{A}\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})。\ \blacksquare$$

例5.7 气体的压力（压强）。我们用动量定理对气体的压力作一粗糙的计算②。设气体单位体积内有 n 个分子，每个分子

---

① 假设流体运动时 $\boldsymbol{P}_1$ 及 $\boldsymbol{P}_2$ 和静止时一样。

② 这个例子只是为了说明动量定理而引进的。更确切的表述方法见有关的物理教科书。

的质量为m，每个分子碰到容器壁以后弹跳回来的速度大小不变。先考虑x方向的运动。假设分子的平均速度是v_x，分子的动量就是mv_x，碰撞前后动量的增量大小为$2mv_x$。在单位时间内，碰在面积为A的壁面上的分子个数是$nAv_x/2$，其中1/2是由于分子可能沿x的正负两个面碰壁而添上的。因此动量的变化率是

$$\frac{dp}{dt}=\frac{n}{2}Av_x\times 2mv_x=mnAv_x^2.$$

根据动量定理得壁面对气体的作用力是

$$F=\frac{dp}{dt}=mnAv_x^2$$

所以沿x面上的压力（压强）是

$$P_x=F/A=mnv_x^2.$$

同样可得沿y方向和z方向的压力分别为

$$P_y=mnv_y^2,\quad P_z=mnv_z^2.$$

气体的压力应与方向无关，即应有$P_x=P_y=P_z$，因而有

$$v_x^2=v_y^2=v_z^2.$$

于是速度平方为

$$v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2=3v_x^2.$$

代入得气体的压力P（对任何一个方向）为

$$P=mnv^2/3.$$

其中v^2应理解为速度平方的平均值。这是气体分子运动理论中的结果。▎

5-3 质心运动定理

按照1-5中的定义，由n个质点组成的刚性连接的质点系，其重心的向径为

$$r_C=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i g r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i g}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i.$$

因为重心的概念是与作用在刚性连接的质点系上平行力系的合力连系在一起的，所以对于非刚性连接的质点系，或者作用在质点上单位质量的重力向量与位置有关，就谈不上平行力系的合力，因而也不存在重心。此时，我们使用质心的概念。质心是一个点，它的向径定义为

$$r_C=\frac{1}{M}\sum m_i r_i. \tag{5.7}$$

它形式上与重心向径的表达式一样，但应该理解为它是系中各质点向径 r_i 的加权平均值①，所取的权数是该质点的质量。

质心的概念适用于任何质点系（刚体或变形体），而且它与外力无关。在存在重心的特殊情况下，质心与重心是同一个点，但是从概念上讲两者是不相同的。在日常生活中人们习惯地把非刚体的质心说成是它的重心。比如说“运动员的重心”，那是指某瞬间假想把人体当作刚体看时的重心。严格地说还是“运动员的质心”较合适。

质点系运动时它的质心也随之运动。由质点系动量定理立即可推出质心的运动方程。

由式(5.7)得到

$$Mr_C=\sum_i m_i r_i.$$

对时间 t 求一阶及二阶导数，得

---

① 数目200，500，650的平均值是

$$(200+500+650)\div 3=450.$$

如果有3个200，5个500，2个650，那么200，500，650的加权平均值是

$$(3\times 200+5\times 500+2\times 650)\div(3+5+2)=440.$$

这里3，5，2叫做相应的权数（weight）。

$$M\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}=\boldsymbol{p},\qquad M\frac{d^2\boldsymbol{r}_C}{dt^2}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}.$$

将后一式代入式(5.5)得

$$\boxed{M\frac{d^2\boldsymbol{r}_C}{dt^2}=\boldsymbol{R}.} \tag{5.8}$$

以上的推导说明，对质点系的动量可以这样来看：设想系中的全部质量都“集中”在质心上，质心的速度为

$$\boldsymbol{v}_C=\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt},$$

质心的动量 $M\boldsymbol{v}_C$ 就是质点系的总动量。式(5.8)表明了**质心的运动定理**：质点系质心的运动好象是一个质点的运动，这个质点的质量等于整个系的质量，受到的力是所有外力的主向量。可见，质心的运动与内力无关。

* * *　相同的两均质杆 AO 和 OB 在 O 处铰接，各点的瞬时速度分布如图5.11所示。问这时系统 AOB 的质心速度是什么？* * *

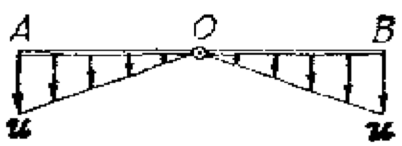


图5.11　质心速度=？

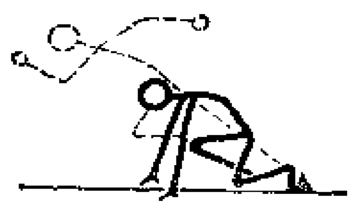


图5.12　什么力使动量突变?

* * *　短跑运动员在起跑时，在很短的时间内由静止过渡到快跑，获得了很大的动量变化(图5.12)。问什么力使他的动量发生这样的突变？ * * *

例5.8　例5.1的飞石索在飞行过程中，不论两块石头之间的绳子是松还是紧，两块石头的运动轨迹是多么复杂，但是其质心 C 的轨道是抛物线。这是因为，根据式(5.8)得出质心的运动微

分方程为

$$(m_{甲}+m_{乙})\ddot{r}_C=m_{甲}g+m_{乙}g,$$

因而

$$\ddot{r}_C=g.$$

可见这与单个质点的抛射运动(见4-1)完全相似。▌

例5.9 "二踢脚"在高空爆炸，如果不计空气阻力等因素，炸开后的碎片在空中的飞行情况尽管各不相同，但是它们的质心却继续沿着原来未炸开前的抛射体轨道运动，直到其中有一部分撞到其他物体上为止。▌

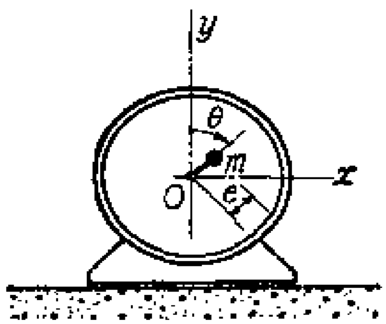


图5.13 电动机会不会跳起来?

例5.10 电动机总质量为M，可以分为两部分：固定部分（机座，外壳和定子）和转动部分，转动部分的质量为m。由于制造上的误差，转子的质心偏离中心轴O有一个偏心距e（图5.13）。假定固定部分的质心在中心轴O上，电机的转速$\dot{\theta}=\omega$(常量)。电机放在水平地面上，分析电机转动时地面的反力$\boldsymbol{P}$。

解 取电动机为质点系。外力有地面对机座的作用力$\boldsymbol{P}$和重力$M\boldsymbol{g}$。取电机未跳动时轴心的位置O为原点，x轴水平向右，y轴竖直向上。因此质心C的坐标为

$$x_C=\frac{m}{M}e\sin\theta,\ y_C=\frac{m}{M}e\cos\theta.$$

考虑竖直方向的运动，式(5.8)在y方向的投影式为

$$M\ddot{y}_C=P_y-Mg,$$

其中P_y为地面对电机的正压力N。将y_C的关系式代入，解出

$$N=Mg-me\omega^2\cos\theta.$$

N的最小值是$Mg-me\omega^2$，当e和ω比较大时，N将出现负值。此时必须有螺栓把电机固定，否则电机将要跳起来而脱离地面。

同理可以分析水平方向的力 P_x。如果地面的摩擦系数 μ 为已知，电机在什么条件下可能产生水平方向的振动，请读者自行分析解答。▎

例5.11 二体问题。考虑仅有两个质点组成的孤立系统，质量分别为 m 和 M。由于没有外力，质点系的质心 C 作等速直线运动。取一个随质心运动的平动参考系，这个参考系叫做**质心参考系**，显然它是一个惯性系，在其中牛顿定律成立。将 M 到 m 的向量记作 $\boldsymbol{r}$（图5.14），则由 C 到 m 的向径是 $M\boldsymbol{r}/(m+M)$，因而在质心系中，质点 m 的运动微分方程为

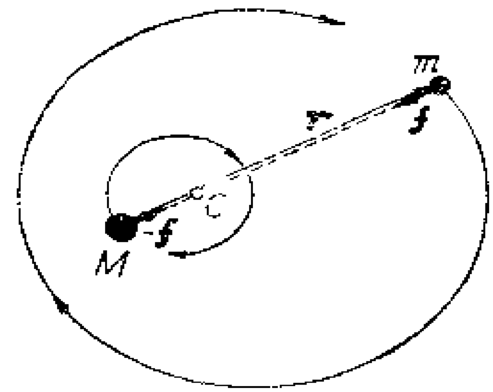


图5.14 二体问题

$$m\left(\frac{M}{m+M}\ddot{\boldsymbol{r}}\right)=\boldsymbol{f},$$

其中 $\boldsymbol{f}$ 是 M 对 m 的作用力。令

$$\mu=\frac{mM}{m+M},$$

亦即

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m}+\frac{1}{M},$$

μ 称为 m 与 M 的折合质量。则 m 点的运动微分方程化为

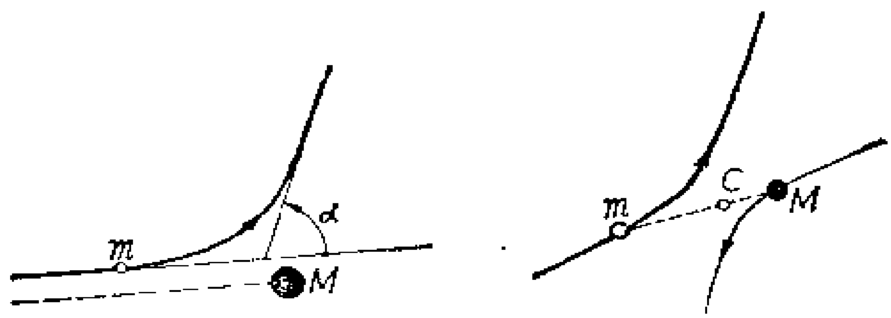
$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{f}.$$

此式说明，如果取一个随着 M 一起运动的平动参考系（注意这个参考系一般不是惯性系，不能直接用牛顿定律），那么在这个参考系中 m 的运动完全相同于质量为 μ 的质点在中心力 $\boldsymbol{f}$ 作用下按牛顿定律所形成的运动。质点 M 的运动微分方程也有类似的结论。▎

在考虑地球由于太阳引力的运动时，作为一种近似模型，可以忽略其他行星及月球的影响，当作二体问题处理。在计入太阳

的运动时，就必须把地球的质量改成折合质量，然后按太阳不动时那样进行计算。由于太阳的质量是地球质量的33万倍，即$m \ll M$，所以$\mu \approx m$。系统质心和太阳中心几乎重合，因此可以近似认为太阳本身是固定不动的。

再如，带正电的粒子m在原子核M的库仑斥力作用下运动时，如果$m \ll M$，那么可以认为原子核M是不动的，而m的轨迹是一双曲线(图5.15(a)，见第四章习题4.71)。如果$m = M/2$，则m



(a)　$m \ll M$　　　　(b)　$m = M/2$

图5.15　粒子的散射轨道

的折合质量$\mu = 2m/3$。相对于M来说，轨道将仍是双曲线，只是形状有些变化，因为偏转角α的表达式中质量m将改为μ。在质心参考系中画出M与m的运动轨道，它们是两条双曲线(图5.15(b))，而M轨道的几何尺寸正好是m的轨道按比例缩小到一半。

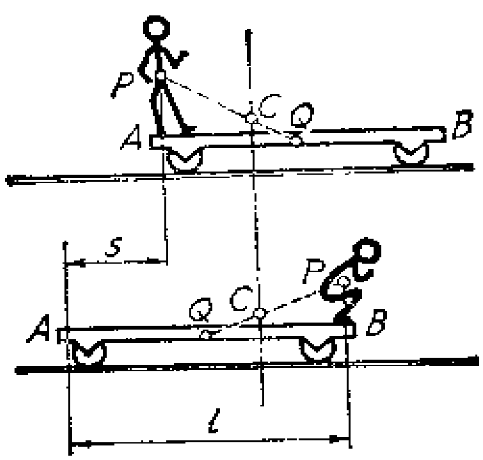


图5.16　有什么办法增大s？

＊＊＊　小车AB重Q，长l，重P的人站在小车上的一端A，开始时人与车都不动(图5.16)。人在车上从A端走到B端，不计地面与车之间的摩擦力。问小车后退的距离s与人的行走方式是否有关(行走方式是指走还是跑，还是跳，是否来回走等等)？为什么？＊＊＊

* * * 质量相同的两个小球用伸直的绳相连，静止地放在光滑的水平面上。开始时给其中一球以垂直于绳的初速，求证两个球各自的运动轨迹都是旋轮线（图5.17中实线与虚线所示），又怎样求绳中的张力？ * * *

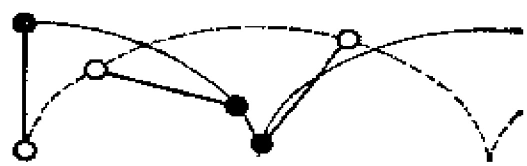


图5.17 小球的轨迹是什么？

5-4 冲击力及其性质

在例4.14中讨论小球对固定面的碰撞时，我们已经遇到过冲击力。这种力的特点是作用时间极短，力的平均值极大，其冲量的大小是有限量。在这一节中将把这种概念精确化，并且引入合适的数学表达式。

在进行某项具体的力学实验或理论计算时，需要对一些物理量规定某个大小范围为“常规”的数量级。比如在作单摆试验时，1秒、1米及1牛顿力等等可以认为是常规量。在研究行星运动时，常规大小则可能要取1个天文单位（10^{11}米数量级）、1天（10^6秒数量级）等等。如果某些物理量的大小出现了比常规量大好几个数量级时，就可以把它当作无穷大看待。反之，如果比常规量小好几个数量级时，则往往可以认为是可忽略的小量或零。至于究竟是大（或小）几个数量级，这要由研究问题的性质来定。这种手法在处理力学问题时是经常要用到的。

例5.12 一小球质量为0.1千克，自4米高处自由落下，与地面碰撞后回跳到2米高。设小球与地面接触0.002秒，求地面对小球冲击力的平均值。

解 容易求得碰撞前小球速度的大小为8.85米/秒，方向向下。碰撞后速度的大小为6.26米/秒，方向向上。设地面对小球

的冲击力 $\boldsymbol{N}$ 的平均大小是 N^*，则由动量定理式(5.6)算出

$$N^* = 757 \text{牛顿},$$

它比重力（常规力）0.98牛顿要大两至三个数量级。小球下落和上升的时间分别是0.90秒和0.64秒。可见冲击力 $\boldsymbol{N}$ 的作用时间0.002秒比这两个时间要小两三个数量级。▎

一个力对时间的平均大小比常规力大几个数量级，其作用时间比常规力的作用时间小几个数量级，而它的冲量（即力的大小对时间的积分值）却具有常规的数量级，这种力称为**冲击力**。粗糙一点说，冲击力是这样一种力，它的平均值为无穷大，作用时间为无穷小，而两者的乘积是个有限量。这种说法不精确，不便于数学运算。为此，我们引入脉冲函数，也叫 δ 函数或狄拉克(Dirac)函数。

作函数 $F(x)$ 如图5.18(a)所示，它的表示式为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x/\varepsilon, & 0 < x \leqslant \varepsilon, \\ 1, & x > \varepsilon. \end{cases}$$

函数 $F(x)$ 对 x 的导数可以写出为①

$$f(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & 0 < x < \varepsilon, \\ 0, & x < 0 \text{ 或 } x > \varepsilon. \end{cases}$$

$f(x)$ 如图5.18(b)所示。

现设 ε 趋于零，$F(x)$的极限记作 $1(x)$ 或 $H(x)$（图5.18(c)），称为单位阶跃函数或海维赛德（Heaviside）函数。它的表示式为

$$1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

单位阶跃函数的导数叫做脉冲函数，用 $\delta(x)$ 表示（图5.18(d)，

① 在 $x=0$ 和 $x=\varepsilon$ 两点 $F(x)$ 是不可微的。

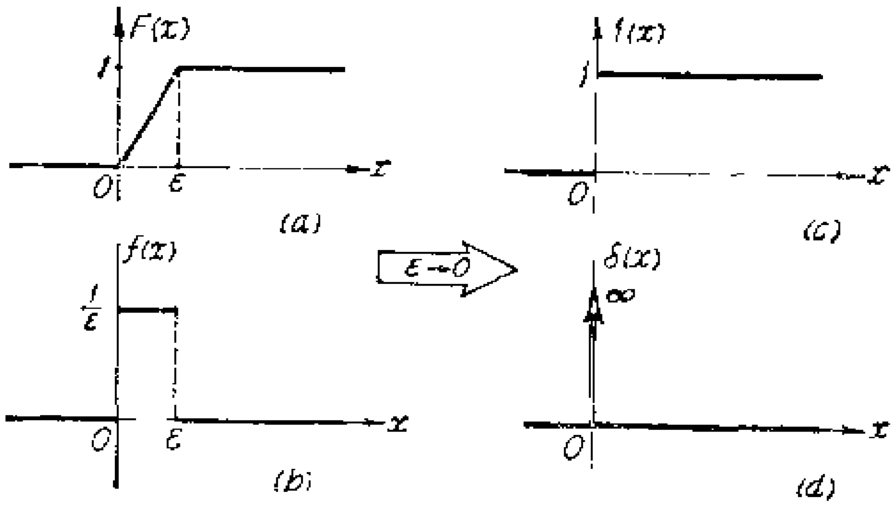


图5.18 脉冲函数的来由

图中用一个箭头表示其大小为无穷大）。它可以形式地写成

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty, & x=0,\\ 0, & x\neq 0。\end{cases}$$

它的积分是单位阶跃函数，即有关系式

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x)dx=1(x),$$

或

$$\int_{-0}^{+0}\delta(x)dx=1。$$

这表示 $\delta(x)$ 是 $1(x)$ 的导数，也说明 $\delta(x)$ 是 $f(x)$ 当 ε 趋于零时的极限。

如果阶跃或脉冲不是在 $x=0$ 处发生，而是在 $x=\xi$ 处发生，则可以用 $1(x-\xi)$ 和 $\delta(x-\xi)$ 表示。例如图5.19中的阶跃函数和

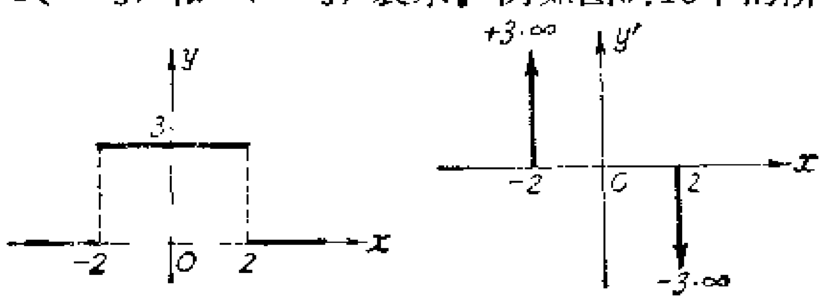


图5.19 脉冲函数的用途

脉冲函数应该分别表示为

$$y(x)=3\times 1(x+2)-3\times 1(x-2)$$

及它的导数

$$y'(x)=3\times\delta(x+2)-3\times\delta(x-2).$$

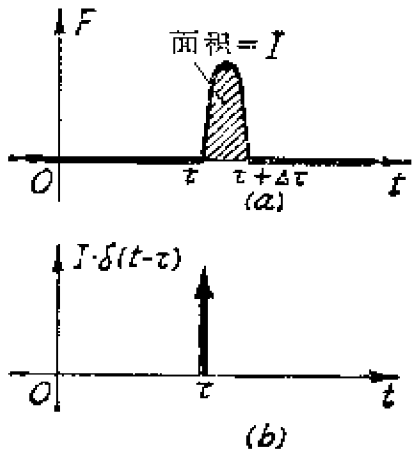


图5.20　冲击力

可以用 δ 函数表示冲击力。设在时刻 τ 到 $\tau+\Delta\tau$ 物体受到一个冲击力 $F(t)$（图 5.20(a)），它的冲量 I 是 $F(t)$ 对时间的积分

$$I=\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}F(t)\,dt,$$

当 $\Delta\tau\to 0$ 时，I 为有限值。则 $F(t)$ 可表示为（图5.20(b)）

$$F(t)=I\delta(t-\tau)①.$$

根据 δ 函数的性质，不难看出

$$\int_{\tau-0}^{\tau+0}F(t)\,dt=I\int_{\tau-0}^{\tau+0}\delta(t-\tau)\,dt=I.$$

把这种表示法推广到向量形式。设在时刻 τ 有一个冲击力 $\boldsymbol{F}$，其冲量 $\int\boldsymbol{F}dt$ 是常规大小的向量 $\boldsymbol{I}$，则有

$$\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{I}\delta(t-\tau).$$

现在分析冲击力对质点的作用效果。设有质量为 m 的质点同时受到冲击力 $\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{I}\delta(t-\tau)$ 和常规力 $\boldsymbol{F}_{常}$ 的作用，则由牛顿第二定律得

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}_{常}+\boldsymbol{I}\delta(t-\tau),$$

对时间 t 积分，积分在冲击力作用的时间间隔 $[\tau-0,\ \tau+0]$ 内进行，得

$$m\boldsymbol{v}(\tau+0)-m\boldsymbol{v}(\tau-0)=\int_{\tau-0}^{\tau+0}\boldsymbol{F}_{常}dt+\boldsymbol{I}\int_{\tau-0}^{\tau+0}\delta(t-\tau)\,dt.$$

---

① $\delta(t-\tau)$ 的量纲是[时间]$^{-1}$。

等号左边是冲击前后动量之差 $\Delta \boldsymbol{p}$；等号右边第一个积分表示常规力在冲击力作用时间间隔内的冲量，它等于零，其物理意义是它的大小与冲击力作用时间间隔同数量级，比常规量小几个数量级；右端第二个积分等于 $\boldsymbol{I}$。因此得

$$\Delta \boldsymbol{p}=m[\boldsymbol{v}(\tau+0)-\boldsymbol{v}(\tau-0)]=\boldsymbol{I},$$

或

$$\boldsymbol{v}(\tau+0)=\boldsymbol{v}(\tau-0)+\boldsymbol{I}/m. \qquad (5.9)$$

这说明：**冲击力使质点的速度发生突变，速度的增量等于冲量除以质量。在冲击过程中常规力可忽略不计。**

现在研究冲击力作用期间质点的位移。在时间间隔$[\tau-0,\ \tau+0]$内，速度的大小是常规大小的量（虽然它有跳跃性的变化，但并不是无穷大），所以

$$\int_{\tau-0}^{\tau+0}\boldsymbol{v}(t)dt=0,$$

或者

$$\boldsymbol{r}(\tau+0)-\boldsymbol{r}(\tau-0)=0.$$

这说明冲击力作用期间质点位移为零。确切地说，由于冲击力的作用时间比常规量小几个数量级，而速度大小是常规量，所以在冲击力作用期间质点的位移比常规量小几个数量级。总之，冲击力对质点作用效果的两个主要特征是**速度发生突变**而**位置没有变化**。

例5.13 质量为m的质点由弹簧竖直悬挂着处于平衡状态(图5.21)，弹簧常数为k。给质点一个竖直向下的打击，其冲量大小为I，求质点受打击后的运动。

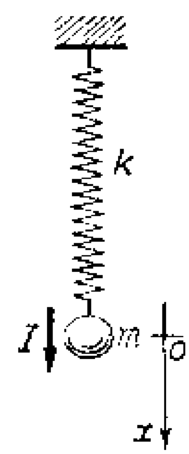


图5.21 求冲击后的运动

解 将冲击力表示为

$$F(t)=I\delta(t-0).$$

运动微分方程是

$$m\ddot{x}+kx=I\delta(t-0),$$

初条件是

$$x(-0)=0,\qquad \dot{x}(-0)=0。$$

将上式对时间由 $t=-0$ 到 $t=+0$ 积分，得

$$m\dot{x}(+0)-m\dot{x}(-0)=I,$$

即质点被打击以后的速度为 $\dot{x}(+0)=I/m$，再积分一次可得出质点被打击以后的位移是

$$x(+0)=0。$$

于是，原来的微分方程与初条件等价于

$$\begin{cases} m\ddot{x}+kx=0 \\ x(+0)=0, \quad \dot{x}(+0)=I/m。\end{cases}$$

容易求得它的解为

$$x=\frac{I}{m\omega}\sin\omega t,\qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}。$$

今后遇到这种情况时，可以认为打击的效果等价于给了一个初速度，只需将初条件改成 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=I/m$ 就行了。▎

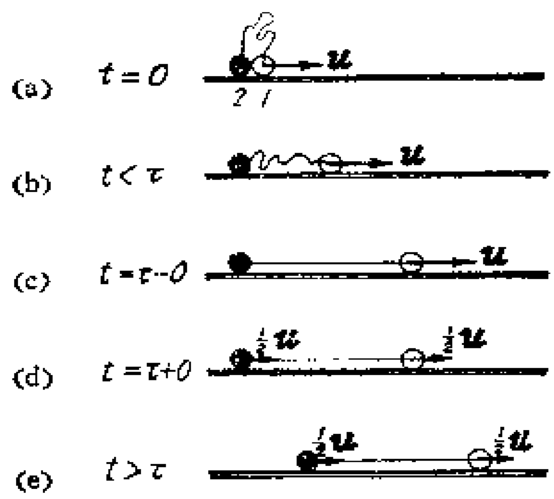


图5.22 冲击前后两个小球的速度?

例5.14 光滑水平面上有两个小球，质量均为 m。它们用一条不可伸长的绳子相连，绳长 l。开始时两小球紧挨着，设小球1获得一初速 u（图5.22(a)），并设当绳子被拉直以后两球的速度相等，分析两个小球的运动和绳中的张力。

解 在 $t<\tau=l/u$ 时，绳子是松弛的（图5.22(b)），这时绳中张力为零，两小球之间无作用力。当 t 在 $[\tau-0,\ \tau+0]$ 间隔内时，两小球之间通过绳子发生冲击，冲击前系统的动量为 mu，

冲击以后小球 1 的速度大小为 v_1，小球 2 的速度大小为 v_2，根据动量守恒定理有

$$mv_1+mv_2=mu.$$

因为 $v_1=v_2$，故得

$$v_1=v_2=u/2.$$

由此可见，在 t 从 $\tau-0$ 到 $\tau+0$ 这个瞬间两个球的速度都有突变（见图5.23(a)）。球1受到向左的冲击力 $-mu\delta(t-\tau)/2$，使其速度突降；而球 2 受到向右的冲击力 $+mu\delta(t-\tau)/2$，使其速度突增。绳内的张力是 $T=mu\delta(t-\tau)/2$（图5.23(b)）。两个球位置的变化规律如图5.23(c)所示，在冲击瞬时的前后沒有变化。▌

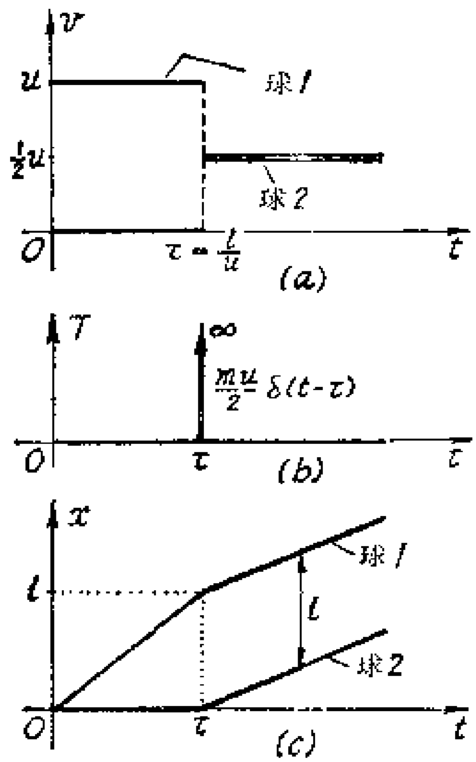


图5.23 速度、冲击力和位移

* * * 在上例中，设绳子中张力 T 的变化规律为

$$T=\begin{cases}mu/2\varepsilon, & \tau<t<\tau+\varepsilon,\\ 0, & t\text{在其余值时},\end{cases}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是小量。求两个小球的速度和位移，画出它们随时间变化的曲线，并与图5.20(a)和(c)进行对比。从中可以看出，冲击后绳子的长度将比原长增大，即产生了"塑性"变形。* * *

例5.15 三个质点 A，B 和 C，质量分别为 m_1，m_2 和 m_3，用拉直而不可伸长的绳子 AB 和 BC 相连，静止地安放在水平面上（图5.24），角

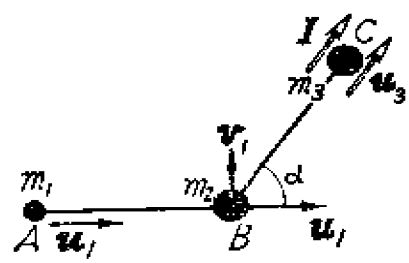


图5.24 求A的速度

ABC 为 $\pi-\alpha$，α 是锐角。对质点 C 施加一冲击力，其冲量大小为 I，方向沿 BC。求证质点 B 运动的方向与 AB 的夹角为 $\mathrm{arctg}[(1+m_1/m_2)\mathrm{tg}\alpha]$，并求质点 A 的速度。

解 设冲击力作用后 B 点的速度投影是 (u_1, v_1)。显然，A 点的速度是沿 AB 的（为什么？）。由于绳子是不可伸长的，利用运动学条件，A 和 B 两点速度在 AB 方向上的投影应相同（见例3.2），所以 A 点的速度大小也是 u_1。同理，B 和 C 两点速度在 BC 方向上的投影也应相等，得出

$$u_1 \cos\alpha + v_1 \sin\alpha = u_3 \qquad (1)$$

这里 u_3 是 C 点的速度大小。

以 A，B 和 C 连同绳一起作为质点系，它受到的外力为 $I\delta(t)$。在这个冲击力作用的时刻，A 与 B 两个质点也通过绳子受到冲击力的作用，所以三个质点的速度都产生突变。其余的力，如摩擦力等是常规力，可略去不计。

质点系沿 BC 方向的动量变化为

$$m_3u_3 + m_2(u_1\cos\alpha + v_1\sin\alpha) + m_1u_1\cos\alpha = I. \qquad (2)$$

质点系在垂直于 BC 方向的动量守恒，有

$$m_2v_1\cos\alpha - m_2u_1\sin\alpha - m_1u_1\sin\alpha = 0. \qquad (3)$$

由(3)就可得出

$$\frac{v_1}{u_1} = \left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\mathrm{tg}\alpha.$$

由方程(1)，(2)和(3)解出质点 A 的速度大小为

$$u_1 = \frac{Im_2\cos\alpha}{(m_1+m_2+m_3)m_2 + m_1m_2\sin^2\alpha},$$

方向沿 AB。▌

5-5 碰撞

在水平面上运动着的两个光滑小球发生碰撞时，球与球之间的作用力是冲击力，作用在小球上的其他力都是常规力，如重

力、地面支承小球的力等等。取相碰的两个小球为对象，冲击力是内力，外力都是常规力，可以忽略。因此在碰撞过程中质点系动量守恒。

设质量为 m_1 的小球在碰撞前后的速度分别为 v_1 和 v_1'①，质量为 m_2 的小球在碰撞前后的速度分别为 v_2 和 v_2'（图 5.25）。根据动量守恒定理有

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'. \tag{5.10}$$

碰撞过程可以分成两个阶段。前一阶段是压缩阶段，两球产生微小的压缩变形，球心之间的距离逐渐缩短，两球之间冲击力方向沿球心连线方向。我们假定，当压缩至两球心间距离达最小时，两球沿 n 方向的速度相等，并记作 V。在这一阶段中冲击力的冲量称为**压缩冲量**，其大小记作 I_1。在此时刻以后开始第二个阶段，即恢复阶段，两球的形状开始恢复，球心距离逐渐增大，直至两球脱离。相应的冲量称为**恢复冲量**，其大小记作 I_2。恢复冲量与压缩冲量的大小之比值称为**恢复系数**，记作 e，即

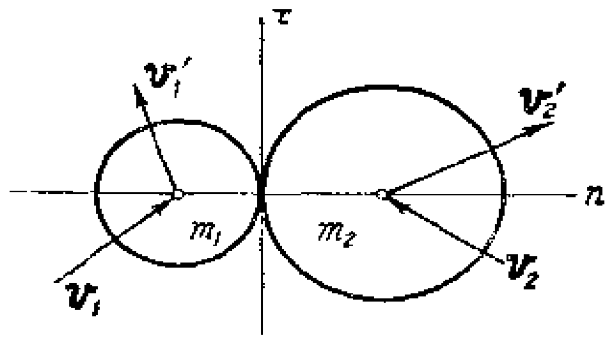


图5.25　两小球碰撞

$$e=I_2/I_1. \tag{5.11}$$

e 值与两碰撞物体的性质有关，由实验方法测定。通常 e 值在 0 与 1 之间，$e=0$ 的情况叫做**完全非弹性碰撞**；$e=1$ 的情况叫做**完全弹性碰撞**。某些材料构成的球体之间的恢复系数列表如下。

将两球碰撞前后的速度在连心线及其垂直方向上分解，连心线方向即两球接触点的法向分量分别记作 v_{1n}, v_{2n}, v_{1n}' 和 v_{2n}'，而

① 实际上这里指小球质心的速度，并且不考虑小球的转动。

碰撞的物体	恢复系数 e
木球与胶球	0.26
木球与木球	0.50
钢球与钢球	0.56
象牙球与象牙球	0.89
玻璃球与玻璃球	0.94

切向分量分别记作 $v_{1\tau}, v_{2\tau}, v'_{1\tau}$ 和 $v'_{2\tau}$。

先考虑法向，根据动量定理可得

$$I_1 = m_1(v_{1n} - V) = -m_2(v_{2n} - V),$$
$$I_2 = m_1(V - v'_{1n}) = -m_2(V - v'_{2n}).$$

由此得

$$v_{1n} - v_{2n} = I_1\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right),$$

$$v'_{1n} - v'_{2n} = -I_2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right).$$

根据式(5.11)得

$$\boxed{\frac{v'_{1n} - v'_{2n}}{v_{1n} - v_{2n}} = -e.} \tag{5.12}$$

这个关系式叫做**牛顿公式**，也可以把它作为恢复系数的定义。实际上测定恢复系数是按此式进行折算的，因为式(5.11)中的 I_1 和 I_2 难于实测。

由式(5.10)得出在法向的分量式再与式(5.12)联立就可解出

$$\begin{cases} v'_{1n} = \dfrac{1}{m_1 + m_2}\left[(m_1 - em_2)v_{1n} + m_2(1+e)v_{2n}\right], \\ v'_{2n} = \dfrac{1}{m_1 + m_2}\left[m_1(1+e)v_{1n} + (m_2 - em_1)v_{2n}\right]. \end{cases} \tag{5.13}$$

因为小球是光滑的，所以在切向小球不承受冲击力，每个小球的切向动量守恒，因此有

$$v'_{1\tau} = v_{1\tau}, \quad v'_{2\tau} = v_{2\tau}. \tag{5.14}$$

当两球的质量、碰撞前速度以及恢复系数已知时，就可以由式(5.13)和(5.14)求出两球碰撞后的速度。

碰撞过程中两球的总动量总是守恒的，但机械能不一定守恒，只有在完全弹性碰撞的情况下，才没有机械能量损失。机械能量损失意味着其中有一部分在碰撞过程中转化为其他形式的能量，如热能等。

＊＊＊ 验核：在完全弹性碰撞中，质点系的动能守恒。＊＊＊

例5.16 恢复系数测定法。质量分别为 m_1 和 m_2 的小球用等长的绳子挂起来(图5.26)。将其中一球拉过偏角 α，然后无初速地释放。它撞击另一球，使它产生的最大偏角为 β。设 α 与 β 已由实验测出，求恢复系数 e 。

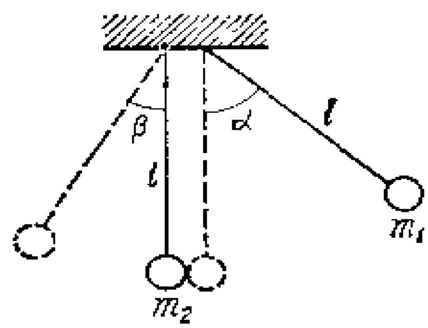


图5.26 由 α，β 求 e

解 由质点的机械能守恒求得碰撞开始时 m_1 的速度大小为

$$u_1=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)},$$

此时 m_2 的速度为 $u_2=0$。在碰撞结束时，m_2 的速度是 u_2'。由于 m_2 的最大偏角是 β，根据机械能守恒，可以算出 u_2' 与 β 之间的关系为

$$u_2'=\sqrt{2gl(1-\cos\beta)}.$$

由于碰撞过程中动量守恒，所以有关系

$$m_1u_1+m_2\cdot 0=m_1u_1'+m_2u_2'.$$

由此算出

$$u_1'=u_1-m_2u_2'/m_1.$$

代入式(5.12)得

$$e=\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1-\cos\alpha}}-1. \quad \blacksquare$$

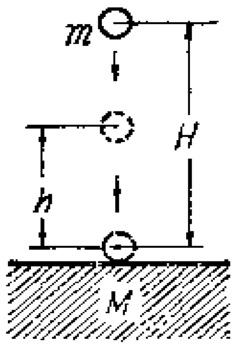
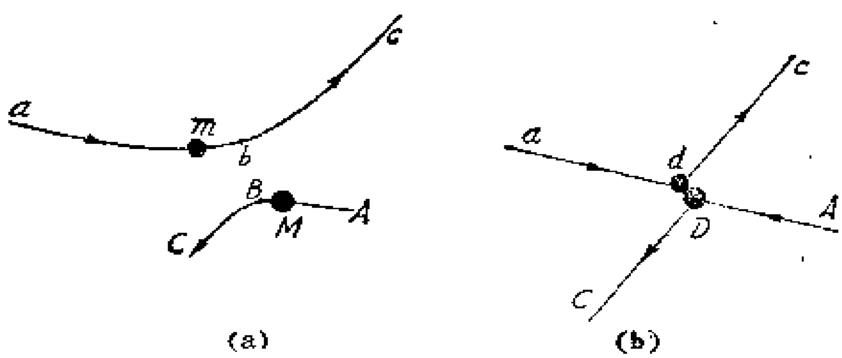


图5.27 测定恢复系数

*** 测定恢复系数的另一种方法。将待测材料作成平板固连在一质量很大的静止物体上。将另一种材料（或同一种材料）作成的小球由高H处自由落下，碰撞后跳回h高度（图5.27），求恢复系数e。***

碰撞过程不仅在宏观物体中发生，在微观粒子中间也经常会遇到。我们对于微观粒子的许多知识都是利用碰撞效应获得的。在微观世界中，即使牛顿定律不成立，碰撞过程中动量守恒仍然成立。

微观粒子的碰撞，并不象宏观的小球那样相互接触。假设有两个粒子m和M相互接近，但有微小的偏心距离。它们相互之间的作用力是库仑斥力，两个粒子在质心坐标系中的轨迹分别是双曲线abc和ABC(图5.28(a))。由于库仑力的大小与距离平方成反比，所以质点m和M在b和B处，比起其他位置时，相互作用力要大得多。如果相互作用力不是库仑力，而是大小与距离的更高次幂成反比的力，那么可以认为这种力只有在两个粒子十分接近，比如以费米（1 费米$=10^{-13}$厘米）计时才存在。可以把上述轨迹当作折线adc和ADC处理(图5.28(b))。两个粒子好象是两个小球那样在d和D处有接触，接触时粒子受到的力是冲击力，不接触时粒子相互之间沒有作用力。因此，粒子的碰撞就可以象小球宏观碰撞一样处理。

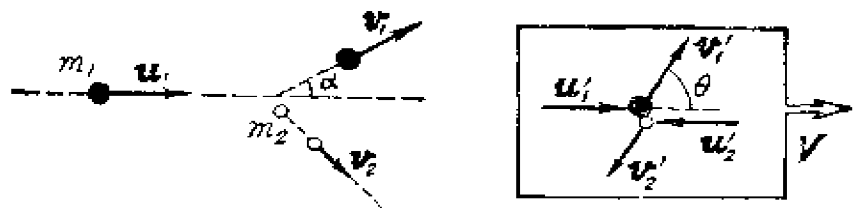


(a)　　　　(b)

图5.28 粒子碰撞时有没有接触?

例5.17 用质量为 m_1 的粒子撞击质量为 m_2 的静止粒子。设 $m_1>m_2$(称为重粒子轰击轻靶)，且碰撞是完全弹性的。求 m_1 的散射角(运动方向的偏转角)的最大值。

解 散射角是在实验室中观察的，所以取地球为惯性参考系[①]。设碰撞前 m_1 的速度为 $\boldsymbol{u}_1$，碰撞后为 $\boldsymbol{v}_1$。散射角是碰撞前后速度向量的偏转角，记作 α(图5.29(a))。m_2 在碰撞前后的速度分别是零和 $\boldsymbol{v}_2$。



(a) 地球参考系　　(b) 质心参考系

图5.29 重粒子轰击轻靶

两粒子所组成的质点系的质心作等速直线运动，速度为

$$\boldsymbol{V}=\frac{m_1\boldsymbol{u}_1}{m_1+m_2}.$$

取与质心一起运动的平动系，即质心参考系。在此系中，因为质心的速度为零，故质点系的动量为零。设在质心系中两质点碰撞前的速度分别为 $\boldsymbol{u}_1'$ 和 $\boldsymbol{u}_2'$，碰撞后分别为 $\boldsymbol{v}_1'$ 和 $\boldsymbol{v}_2'$。因碰撞前后动量为零，即

$$m_1\boldsymbol{u}_1'+m_2\boldsymbol{u}_2'=0,\quad m_1\boldsymbol{v}_1'+m_2\boldsymbol{v}_2'=0.$$

所以

$$\frac{v_1'}{u_1'}=\frac{v_2'}{u_2'}=k.$$

其中 k 是常数。由于碰撞是完全弹性的，动能损失为零，所以有 $\Delta T=0$，即

① 物理学中常称它为实验室参考系。

$$\frac{m_1}{2}(u_1'^2-v_1'^2)+\frac{m_2}{2}(u_2'^2-v_2'^2)$$

$$=(1-k^2)\left(\frac{1}{2}m_1u_1'^2+\frac{1}{2}m_2u_2'^2\right)=0.$$

由此得到$k=1$。即在完全弹性碰撞前后，粒子相对质心参考系的速度大小不变。因为$u_1'=u_1-V$，所以有

$$v_1'=u_1'=\frac{m_2u_1}{m_1+m_2}.$$

再回到地球参考系中，碰撞后m_1的速度是

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_1'+\boldsymbol{V}.$$

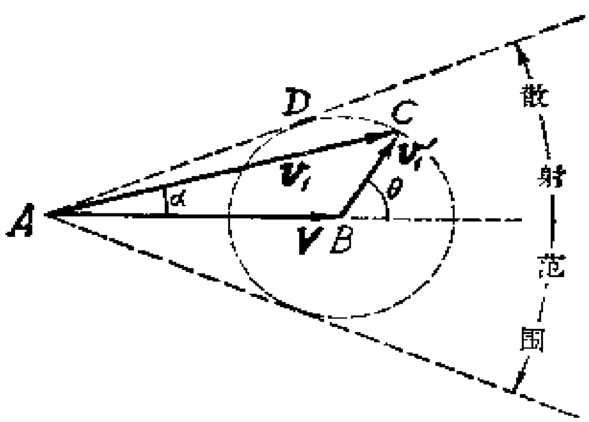


图5.30 重粒子轰击轻靶的散射范围

上式右端两个向量大小的比值

$$\frac{V}{v_1'}=\frac{m_1}{m_2}>1.$$

$\boldsymbol{V}$的方向是已知的，而$\boldsymbol{v}_1'$的方向则是任意的①。不难由图5.30中的几何关系看出，不论θ为什么值，$|\alpha|$不可能超过角DAB，即

$$|\alpha|\leqslant\arcsin(v_1'/V).$$

由此得出

$$|\alpha_{max}|=\arcsin(m_2/m_1).\quad \blacksquare$$

5-6 变质量系统的运动

可以用动量定理来考虑变质量系统的问题。我们从一个例子说起。

---

① 因为这里把粒子当作质点，即半径为零的球。

例5.18 设车厢质量为2000千克，车上载有1000千克砂子。原来车和砂子都是静止的，后将砂子水平向后抛出，砂子离车厢时的相对速度大小为 v_r（图5.31）。设车子不受水平外力，问砂子抛完时车厢的速度大小 v 与 v_r 的比值是多少？

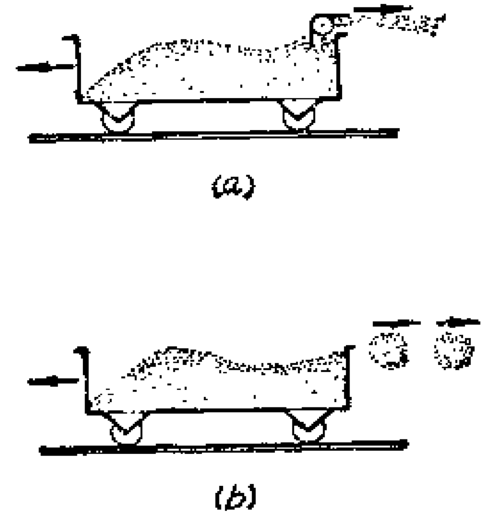


图5.31 一块块抛出与连续地抛出效果一样吗？

解 这个问题的答案与砂子抛出的方式有关。

假设把这1000千克砂子在同一瞬间一下子以水平相对速度 v_r 抛出，则根据动量守恒定理有

$$2000\times v+1000\times(v-v_r)=0.$$

解得

$$\frac{v}{v_r}=\frac{1}{3}.$$

再设想分两次抛出，每次抛出500千克。第一次抛出后车速为 v_1，由动量守恒得

$$\frac{v_1}{v_r}=\frac{1}{6}.$$

第一次抛出后，车厢同残余的砂子一起的质量为2500千克。设第二次抛出后车速为 v，则由动量守恒得

$$2000\times v+500\times(v-v_r)=2500v_1.$$

由此求得

$$\frac{v}{v_r}=\frac{11}{30}\approx 0.367.$$

可见分两次抛出车厢最后的速度要比一次抛出为大。

依此类推，如将砂子分十次抛出，每次抛出100千克，则速度大小之比为

$$\frac{v}{v_r}=\frac{100}{3000}+\frac{100}{2900}+\frac{100}{2800}+\cdots+\frac{100}{2100}\approx 0.397.$$

显然，如果将砂子分成 n 等份，分 n 次抛出，其结果是

$$\frac{v}{v_r}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1000/n}{3000-(i-1)\times 1000/n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3n-(i-1)}.$$

令 $n\to\infty$，则可求得连续抛出时的结果为

$$\frac{v}{v_r}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3n-i+1}=\int_0^1\frac{dx}{3-x}$$

$$=\ln\frac{3}{2}\approx 0.405. \quad ▌$$

可以从两个角度来看待上述例题中的讨论对象。如果把车厢以及全部砂子（不管它在不在车上）作为质点系，那么系统的质量当然是不变的；如果把车厢连同当时在车厢上的砂子当作质点系，那么系统的质量在不断地减少，它是一个变质量的系统。对于变质量系统，我们可以作如下的理解：设系统在时刻 t 时质量为 $m(t)$，在时刻 $t+\Delta t$ 时质量为 $m(t+\Delta t)=m(t)+\Delta m$，即在 Δt 时间间隔内，系统的质量改变了 Δm，改变的原因是因为有一部分具有质量为 Δm 的质点系合并进来（当 $\Delta m>0$ 时，如图5.32所示）或分离出去（当 $\Delta m<0$ 时）了。严格地说，两个瞬时所说的并不是同一个质点系，但是我们习惯于把它们称为变质量系统，如果把它们称为有质量流入（或流出）的系统，则含义更清楚一些。从例5.18中看出，可以把连续的变质量系统的问题看成是离散的变质量问题的极限情况。我们将应用这种处理方法推导一般的变质量系统的运动微

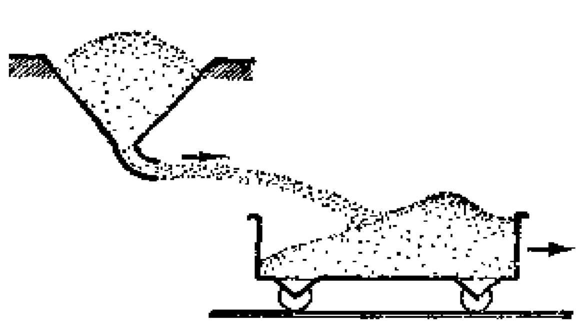


图5.32　有质量流入的系统

分方程。

设在时刻 t 质量为 $m(t)$的那一部分的质心的绝对速度为 $\boldsymbol{v}$（我们不考虑转动），质量为 Δm 的那一部分的质心速度为 $\boldsymbol{u}$，则它相对前一部分的相对速度为 $\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$。在时刻 $t+\Delta t$，这两部分结合成一体，其共同质心的绝对速度为 $\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}$。另外，再设在这个时间间隔内，这两部分受到的外力主向量为 $\boldsymbol{F}$(图5.33)。

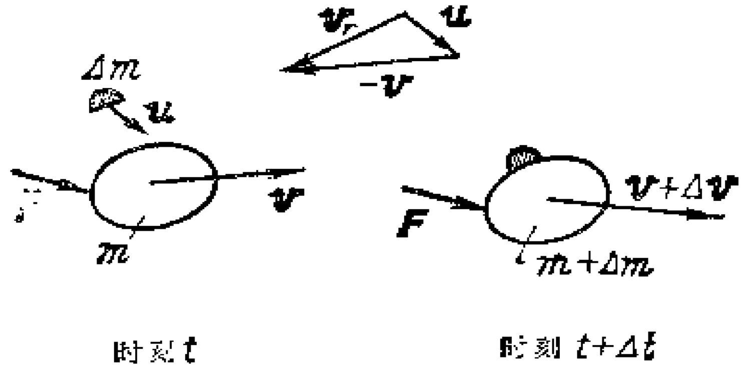


图5.33 变质量系统的运动

对于由 m 及 Δm 组成的系统应用动量定理，得

$$(m+\Delta m)(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v})-(m\boldsymbol{v}+\Delta m\boldsymbol{u})=\boldsymbol{F}\Delta t_{\circ}$$

如果质量是连续变化的①，则当 Δt 是无穷小量时，$\Delta m\cdot\Delta v$ 是 Δ_t 的二阶或更高阶的无穷小量。将上式展开，并取 $\Delta t\to 0$ 时的极限，即得

$$\boxed{m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}+\frac{dm}{dt}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})_{\circ}} \tag{5.15}$$

这是变质量系统的基本运动微分方程，它与不变质量系统的质心运动方程相当。当 $dm/dt=0$时，式(5.15)就成了质心运动方程。

式(5.15)也可以写成

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}+\frac{dm}{dt}\boldsymbol{v}_{r_{\circ}} \tag{5.16}$$

---

① 这要求 $m(t)$是连续函数，因而 Δm 是 Δt 的同阶的或高阶的小量。

对于流出质量的情况，即 $dm/dt<0$，可以类似地导出形式完全相同的方程。

式(5.15)或(5.16)说明，在变质量系统上，除了有真实的力 $\boldsymbol{F}$ 作用以外，好象还作用一个力 $(dm/dt)\boldsymbol{v}_r$。如果变质量系统原来不受外力作用，那么可以依靠抛出（或并入）质量来改变其运动状态。这就是火箭推进的原理。

＊＊＊ 有人认为可以这样来推导变质量系统的基本运动微分方程：变质量系统的瞬时动量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$，其中 $m=m(t)$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$，代入动量定理式(5.5)，得

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}-\frac{dm}{dt}\boldsymbol{v}.$$

这样做对不对？为什么？＊＊＊

例5.19 火箭。设火箭竖直向上飞行，初速大小为 v_0，初始质量为 m_0。经过时间 τ 后燃料烧完，火箭质量为 m_1，求这时速度的大小 v_1。设火箭向后喷气的相对速度大小是 v_r。

解 取向上为正方向。应用方程(5.16)得

$$m\frac{dv}{dt}=-mg+(-v_r)\frac{dm}{dt}.$$

因为 $m\neq0$，可写成

$$dv=-gdt-v_r\frac{dm}{m}.$$

将上式从初始时刻到燃料烧完时刻积分，并把 m,v 的相应值 m_0，v_0 和 m_1,v_1 代入，便得

$$v_1=v_0+v_r\ln(m_0/m_1)-g\tau.$$

上式右端第三项是由于重力而损失的速度，τ 很小时，它很小；第二项是由于喷气推动而获得的速度，它与喷气时间 τ 无关。

若忽略重力的作用，则速度增量只与喷气速度 v_r，质量比 m_0/m_1 有关。喷气速度由燃料的特性及发动机的品质确定，目前最

高大约是 2～3 公里/秒。

如果火箭的壳体与燃料的质量比能做到象鸡蛋的壳体与蛋液的质量比一样（大约为 10），那么火箭的速度增量（v_1-v_0）最多也只能达到 5～7 公里/秒，还达不到第一宇宙速度 7.9 公里/秒。可见依靠单级火箭是难于实现宇宙航行的。

为要实现宇宙航行，必须使用多级火箭。这一结论最早是由俄国的中学教员齐奥尔科夫斯基在1929年提出的。下面以三级火箭为例来说明这个问题，设每一级的相对质量如下表所示：

	空　壳	燃　料	本节总计	累　计
第三级火箭	1	6	7	7
第二级火箭	10	60	70	77
第一级火箭	100	600	700	777

第一级火箭燃料烧完以后速度为

$$v_r \ln(777/177)=1.48v_r,$$

随后就把第一级火箭的空壳（质量为 100）抛弃不要。这样当第二级火箭开始燃烧时，火箭质量只有77。

第二级火箭燃料烧完以后，火箭的速度又增加了

$$v_r \ln(77/17)=1.51v_r.$$

同理，第三级火箭燃料烧完时，火箭速度的增量为

$$v_r \ln(7/1)=1.95v_r.$$

所以，火箭最后（此时只剩下一个质量为 1 的第三级火箭的空壳）的速度大小为这三次增量之和，即

$$1.48v_r+1.51v_r+1.95v_r=4.95v_r.$$

当 v_r 取 2 公里/秒时，它就超过了第一宇宙速度。如果在第二级和第三级火箭起动之前不将无用的外壳扔掉，那么火箭最后（此时剩下的是三个空壳）的速度是

$$v_r \ln(777/111)=1.95\,v_r,$$

还是达不到第一宇宙速度！

* * * 应用式(5.15)重新解例5.18。又问在"一块块"分次抛出时能不能用式(5.15)？ * * *

例5.20 用手拿住均匀链条的上端，使下端刚好着地。突然将手放开，使链条竖直下落(图5.34)。求证地面受到的最大压力是链条重量的三倍。

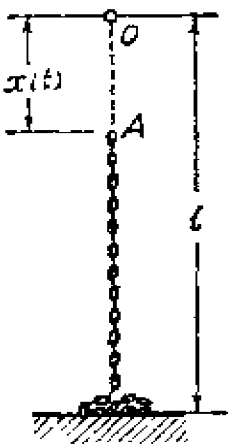


图5.34 最大压力是多少？

解 设链条长为 l，质量为M，上端 A 下落的距离为 $x(t)$。分两步做。

第一步，考虑在空中的那一段长为 $(l-x)$ 的链条为对象(变质量的质点系)，它的质量为

$$m=(l-x)M/l。$$

在时间间隔 dt 内落地的一小段链条的绝对速度与空中那一大段的速度 v 相等，经地面的冲击随后突变为零。根据式(5.15)有

$$m\frac{dv}{dt}=mg-\frac{dm}{dt}(v-v)。$$

所以
$$m\frac{dv}{dt}=mg。$$

这与自由落体的方程形式一样，因此有 $v^2=2gx$。

第二步，再取全部链条为对象。已经落在地面上的那部分链条的动量为零，所以全部链条在时刻 t 的总动量是

$$p=mv=(l-x)Mv/l。$$

设地面反力为N，方向竖直向上，由动量定理得

$$\dot{p}=Mg-N。$$

最后得

$$N=Mg-\dot{p}=Mg-\frac{l-x}{l}Mg+\frac{1}{l}Mv^2。$$

将第一步的结果 $v^2=2gx$ 代入，得

$$N=3Mgx/l。$$

当全部链条落地的瞬间，即$x=l$时N最大，正好等于$3Mg$。在$t=0$时，压力N为零。随着链条的下落N愈来愈大，压力增长与时间t，距离x的关系如图5.35所示。当$t=\sqrt{2l/g}$时，即$x=l$的瞬间，N达到最大值，之后N又突然降到Mg。这是因为链条对地面的冲击已经完毕，压力就是全部链条的重量。▌

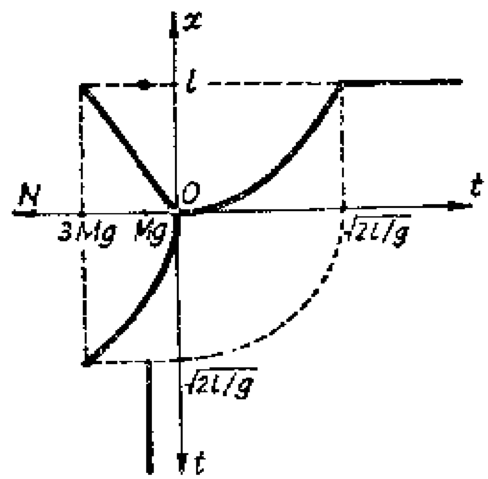


图5.35 N的变化

习题

5.1 求证：均匀薄球壳对一质点的引力是

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\gamma Mm}{r^2}\boldsymbol{r}^0 \text{（当 } r>R \text{ 时）；}$$

$$\boldsymbol{F}=0 \text{（当 } r<R \text{ 时），}$$

其中M为球壳的总质量，m为质点的质量，r为球心与质点的距离，$\boldsymbol{r}^0$为从球心到质点的单位向量，R为圆球壳的半径，γ为引力常数。

5.2 求证：均匀密度的圆球对球外一质点的引力为

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\gamma Mm}{r^2}\boldsymbol{r}^0,$$

其中所用字母的意义同上题。

5.3 求证：密度为ρ的均质圆球对其内部一质点的引力与质点到球心的距离成正比，并求出这个比例常数。（提示：利用前两题的结果。）

5.4 一根长为l，质量为M的均质杆放在光滑的水平面上。在这根杆的两端沿轴加两方向相反的拉力P和Q，如$P>Q$，求杆的加速度及杆上任一截面所受的张力。

5.5 设地球的质量为M，半径为r，月球的质量为$M/75$，两者中心相距为$60r$。若地球和月球对某一质点的引力互相平衡，求质点离地心的距离x。

5.6 一均匀细直杆AB，长为$2a$，A端靠在光滑的水平地板上。开始时，杆是静止的并与地板成α角，释放后杆受重力作用而倒在地上。已知在运动过程中A端始终靠着地面，求杆端B的轨迹。

5.7 在光滑的水平面上平放着一半径为a、质量为M的圆环。环上有一质量为m的甲虫，原来静止，后甲虫沿圆环爬行，求甲虫和圆环中心的轨迹。

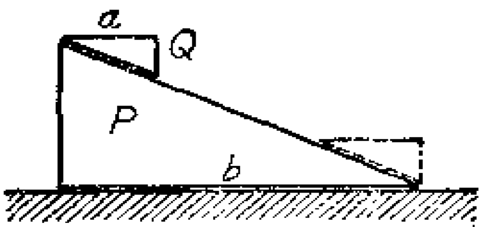
5.8 一个重P的人手里拿着重Q的物体，以仰角α，速度v_0向前跳去。当他到达最高点时将物体以相对速度u水平地向后抛出。不计空气阻力，问由于物体的抛出，跳远的距离增加了多少？

5.9 两质量都等于M的小车，停在光滑的水平直铁轨上。一质量为m的人，自一车跳到另一车，并立刻自第二车跳回第一车。证明两车最后速度大小之比为$M:(M+m)$。

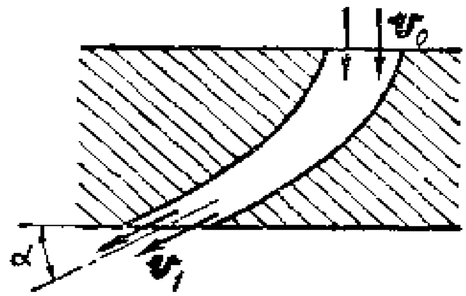
5.10 一辆炮车停在光滑的水平直铁轨上。炮弹的质量为m，炮身和炮车的总质量为M。如炮身的仰角为α，炮弹出口时相对速度的大小为V，求炮弹离开炮身时的绝对速度v及炮车反冲的速度U。

5.11 重Q水平边长为a的直角楔放在重P水平边长为$b(>a)$的直角楔上，大楔子又放在光滑的水平面上，如图。当小楔子自图示位置完全滑下时（相对位置如图中虚线所示），求大楔子的位移。假定初始时系统静止。

5.12 水流入固定水道，水道的截面积逐渐改变且其截面与竖直面呈对称。水流入的速度$v_0=2$米/秒，并与水平成垂直，水道进口截面积为0.02米^2。水流出的速度$v_1=4$米/秒，并与水平成$\alpha=30°$角。求水对水道壁作用力的水平分力。



题 5.11 图

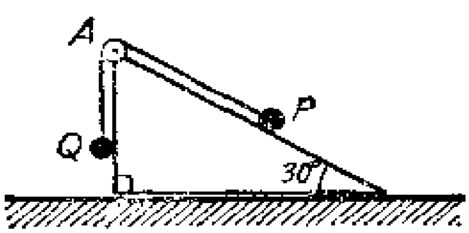


题 5.12 图

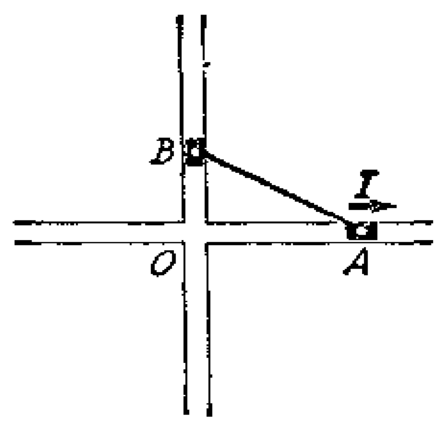
5.13　三只小船的总质量（包括船员和船上的东西）均为M，以相同的速度鱼贯而行。如中间船上的人以水平相对速度（相对自身的船）u将质量为m的两个物体同时掷给前后两只船，求以后各船的速度。

5.14　一质量等于10克的物体以速率$v_0=10$厘米/秒而运动，它忽然受一打击，使它的速率变为$v_1=20$厘米/秒，并改变运动方向45°。求打击冲量的大小和方向。假如同一物体在静止状态受此打击，则它的速度为何（大小和方向）？

5.15　图示质量为$2m$的直角楔放在水平面上。质点$\boldsymbol{P}$的质量为$3m$，质点Q的质量为m。所有接触都是光滑的，不计滑轮A和绳子的质量。求楔的加速度、绳中张力和楔对$\boldsymbol{P}$点的反作用力。



题 5.15 图



题 5.16 图

5.16 图示水平面内光滑直角槽中有两个质量均为m的滑块A和B。它们由长为l的轻刚性杆铰链连结，初始时静止，$\angle OAB=\alpha$。今在OA方向给滑块A作用一冲量I，证明：经过时间$t=2\pi ml/(I\sin\alpha)$后，A和B回到它们的初始状态。又证明，杆中张力在整个运动期间保持常值，并求出它的大小。

5.17 质量为m的子弹以速度v打入相向而行的质量为M，速度为V的物体内。求证：(1)若子弹留在物体内，则物体的速度为$(MV-mv)/(M+m)$(正向同V)；(2)若子弹穿透物体并以速度u继续前进，则物体的速度为$V-m(v-u)/M$。

5.18 一冰雹落在一水平冰面上，它的下落速度与竖直线成30°角，回跳速度与竖直线成60°角。假定雹子与冰面的接触是光滑的，求它们的碰撞恢复系数e。

5.19 质量为m的圆球同另一质量为m_1的静止圆球碰撞。假定它们之间的接触是光滑的，且无转动，在碰撞之后两球的速度方向互相垂直。求证$m=em_1$，e为两球之间的碰撞恢复系数。

5.20 一光滑小球与相同的静止的小球碰撞，碰撞前第一个小球运动的方向与碰撞时两球的联心线成α角，恢复系数为e。求碰撞后第一个小球偏过的角度β，并证明在各种α值下β的最大值为

$$\beta_{max}=\arcsin\left(\frac{1+e}{3-e}\right).$$

5.21 两个小球的质量分别为m_1和m_2，以长为l的不可伸长的线连结，放置在光滑的水平面上。开始时线是拉直的，在平面上另有一质量为m_3的光滑小球，以垂直于线的速度u与小球m_1对心相碰。求碰撞后线中的张力，假定恢复系数为e，三个小球的半径相同。

5.22 三个完全弹性的球放在一光滑水平槽内，彼此不相接触，质量依次为m_1,m_2,m_3。现m_1以初速u与m_2相碰（第一次

碰撞），求经过两次碰撞后每一个球的速度。求证：如

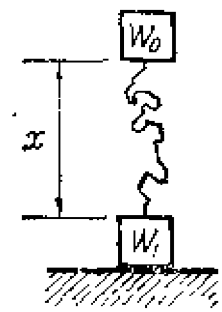
$$m_2(m_1++m_2+m_3)\geqslant 3m_1m_3,$$

则不可能发生第三次碰撞。

5.23 在上题中，如各球之间的恢复系数都为 e，为使 m_3 碰撞后获得最大可能的速度，则 m_1,m_2,m_3 之间应满足什么关系？这时 m_3 的速度是多少？

5.24 弹性球自高 h 处无初速地下落在水平冰面上，碰撞恢复系数为 e。求证：经过时间 $t=\frac{1+e}{1-e}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 后此球将停止跳动。在整个弹跳过程中，球所经过的总路程 $s=(1+e^2)h/(1-e^2)$。

5.25 设有两个重物 W_0 和 W_1，以柔软而不可伸长的轻绳连系（如图），绳长为 l。若将重物 W_0 自 W_1 的上面以初速 v_0 竖直上抛（开始时图中 $x=0$），W_1 放在地面上。求重物 W_0 上抛的最大距离 H。

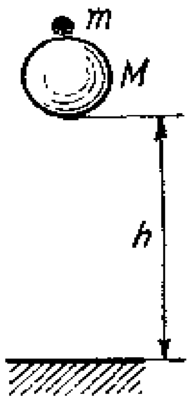


题 5.25 图

5.26 质量均为 m 的两个质点 A 和 B，由长为 l 的不可伸长的轻绳相连系。B 点约束在光滑水平桌面上的光滑直槽内，它可以在槽中自由滑动。开始时 A 点静止在桌面上，B 点静止在直槽内，AB 垂直于直槽且距离为 $l/2$。如 A 点以速度 v 在桌面上平行于槽的方向运动，求证：当 B 点开始运动时，它的速度大小为 $3v/7$，并求绳子受到的冲量和槽的反作用冲量。

5.27 质量为 M 的炮车放在光滑的水平直铁轨上，它在与铁轨成 φ 角的竖直平面内以仰角 α 发射炮弹，炮弹的质量为 εM（$\varepsilon\ll 1$），相对炮身的出口速度为 V。若不计 ε 的平方项及高次项，证明：(1)炮弹离开炮口的绝对速度的大小为 $V(1-\varepsilon\cos^2\varphi\cos^2\alpha)$，其仰角为 $\alpha+\varepsilon\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\varphi$；(2)炮弹的最大射程为 $R(1-\varepsilon\cos^2\varphi)$，其中 R 为无反冲时的最大射程。

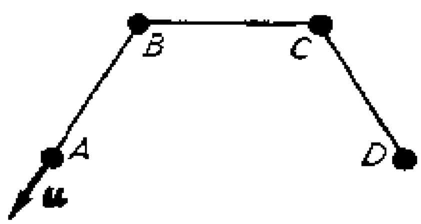
5.28 设图中小球质量 $m\ll$ 大球质量 M，且两球间有一空



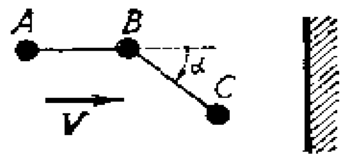
题 5.28 图

隙。两球同时自高 h 处无初速地下落，碰撞都是完全弹性的，问小球反弹至多高？

5.29 四个相等质量的质点由三根不可伸长的绳子依次连结，放在光滑水平面上。三根绳子形成半个正六边形。今有一冲量作用在端点 A 上并且使打击后这个质点的速度为 u，方向沿着绳子向外。证明：另一端点 D 的速度大小为 $u/13$。



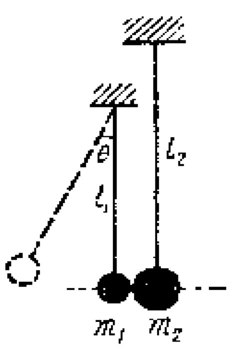
题 5.29 图



题 5.30 图

5.30 图示质点系 A,B,C 放在光滑水平面上。每个质点的质量均为 m。A 与 B，B 与 C 之间用轻刚性杆铰链连结，$\angle ABC=\pi-\alpha(\alpha<\pi/2)$。整个系统以速度 V（保持这个形状）沿 AB 方向运动。当质点 C 碰撞在无弹性的、光滑的、与 AB 垂直的墙上时，证明作用在墙上的冲量大小为 $mV(3+\sin^2\alpha)/(1+3\sin^2\alpha)$。

5.31 三个质点 A,B,C 相应的质量为 $m,2m,3m$，放在光滑水平面上。A 与 B，B 与 C 由不可伸长的轻绳相连。ABC 的形状为等边三角形。给质点 C 一个平行于 AB（指向由 A 到 B）的速度 V，证明质点 A 开始运动时它的速度的大小为 $2V/19$。



题 5.32 图

5.32 两球的质量各为 m_1,m_2，分别用长为 l_1,l_2 的两根不可伸长的绳子平行地挂起，使两球的中心在同一水平上并且紧挨着。今使 m_1 球与竖直线偏离 θ 角，然后无初速地释放。若恢复系数为 e，求第二个球的最大偏角 α。

5.33 一质量为 M_0，面积为 A 的圆盘，受一垂直于盘面的常力 F 的作用，在密度为 ρ

的均匀尘土中运动，尘土以常速率V与圆盘相向运动。假如同圆盘相遇的尘土统统粘在盘面上，而圆盘的初速度为零，求圆盘的速度v和圆盘的运动方程。

5.34 雨滴开始自由下落时质量为M，在下落过程中，单位时间内凝结在它上面的水汽的质量为λ，λ为常量。不计空气阻力，求雨滴在时刻t时下落的距离。

5.35 雨滴下落时其质量的增加率与雨滴的表面积成正比，求雨滴的速度与时间的关系，假定初始时雨滴半径为a，速度为零。

5.36 某火箭竖直往上发射，其本身的质量为m，加上燃料后的总质量为M。假定发射火箭时在单位时间内消耗的燃料与初始总质量M成正比，比例常数是α，燃料喷出的相对速度v_r是常量，重力加速度g为常量，求证：

（1）只有当$\alpha v_r > g$时，火箭才能上升。

（2）火箭能达到的最大速度为$v_r \ln\frac{M}{m} - \frac{g}{\alpha}\left(1-\frac{m}{M}\right)$。

（3）火箭能达到的最大高度为

$$\frac{v_r^2}{2g}\left(\ln\frac{M}{m}\right)^2 + \frac{v_r}{\alpha}\left(1-\frac{m}{M}-\ln\frac{M}{m}\right).$$

5.37 一变质量单摆在介质中运动。摆的质量由于质点的离散作用，按已知规律$m=m(t)$变化，且质点离散的相对速度为零。已知摆线的长度为l，单摆受到的阻力R与角速度成正比，即$R=-\beta l\dot{\varphi}$，写出这个单摆的运动微分方程。

5.38 一条均质的链条在一水平地面上卷成一堆。某人取链条的一端以匀速v竖直向上举起。当上端离开地面高度为x，下端尚未离开地面时，求它手中受力多少？设链条的线密度ρ为常值。

5.39 雨滴在云层中下落，初始速度的大小为v_0，方向竖直向下，设雨滴质量的增长率是$dm/dt=kmv$，其中k是常量，v是雨滴速度。不计阻力，证明雨滴的极限速度为$\sqrt{g/k}$。

第六章　动量矩定理

移动和转动是刚体运动的两种基本形式，与它们相联系的，在静力学中是力和力矩或主向量和主矩；而在动力学中则是动量和动量矩（角动量）。动量矩是描述刚体转动性质的特征量，它与描述刚体移动的特征量——动量有许多类似的地方。在本章进行过程中，读者可注意与上一章进行适当的对比。

6-1　质点系动量矩定理

在 4-5 中已经讲过质点的动量矩定理，即在惯性参考系中

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}. \tag{6.1}$$

设质点系包含 n 个质点，质量分别是 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$。在参考系中取固定点 O，系中每个质点对 O 点动量矩的向量和称为质点系的动量矩（或角动量），记作 $\boldsymbol{G}$，即

$$\boldsymbol{G}=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i). \tag{6.2}$$

其中 $\boldsymbol{r}_i$ 是第 i 个质点自 O 点出发的向径，$\boldsymbol{p}_i=m_i\boldsymbol{v}_i=m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 是它的动量。动量矩是一个向量，它与 O 点的选择有关。

＊＊＊　“动量矩是反映转动的特征量，因此不作转动的质点系动量矩一定是零”，这个说法对不对？举例说明之。＊＊＊

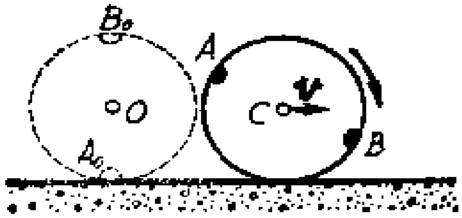


图6.1　动量矩＝？

＊＊＊　有一轮子半径为 R，不计其质量，在水平面上无滑动地滚动，轮心速度为常量 $\boldsymbol{v}$。轮缘上粘有两重质点 A 与 B，质量均为 m。在图 6.1 中初始时刻的位置用虚线表示，C 为轮心，O

为初始时刻轮心所在的位置。求下列几种情况任意时刻质点系的动量矩的表达式：

（1）以地面为参考系，对O点的动量矩；

（2）以质心平动系为参考系，对C点的动量矩；

（3）以轮子固连系为参考系，对C点的动量矩。＊＊＊

＊＊＊ 将作用在刚体上的力系的主向量、主矩与质点系的动量、动量矩作一个对照，主向量对应于质点系的动量，主矩对应于动量矩。问力系等价于一个力螺旋这一结果对应于什么？＊＊＊

在惯性参考系里取固定点O，根据式（6.1），对每个质点i都可写出

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i)=\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{外}+\sum_{j\neq i}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

将上式对$i=1,2,\cdots,n$求和，并利用式(6.2)得

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=\sum_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{外}+\sum_i\sum_{j\neq i}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}.$$

上式右端第一项是所有外力对O点的主矩，记作$\boldsymbol{L}_0$或$\boldsymbol{L}$；右端第二项是内力对O点的主矩，它等于零。于是有

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=\boldsymbol{L}.}\tag{6.3}$$

这就是**质点系的动量矩定理**：质点系的动量矩对时间的导数等于作用在系上所有外力的主矩。

过O点任意取一个固定在惯性系中的正交坐标系$[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$，则式（6.3）可以写成三个数量方程

$$\begin{cases}\dfrac{dG_x}{dt}=L_x,\\[2mm]\dfrac{dG_y}{dt}=L_y,\\[2mm]\dfrac{dG_z}{dt}=L_z.\end{cases}\tag{6.4}$$

其中 G_x，G_y，G_z 是动量矩 $\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 方向的投影，与力矩的情况类似，它们分别称为质点系对 x，y 和 z 轴的动量矩。

如果式 (6.3) 右端 $\boldsymbol{L}=0$，则 $\boldsymbol{G}$ 为常向量。如果外力对某一轴之矩为零，比如 $L_x=0$，则 G_x 为常量。这就是**质点系的动量矩守恒定理**：当外力主矩为零时，动量矩守恒；当外力对某轴的主矩为零时，对此轴的动量矩守恒。

例6.1 两人同时爬绳（图6.2），A 与 B 相对于绳子的速率分别为 u_1 与 u_2。两人质量同为 m，不计绳的质量，不计绳与滑轮之间的摩擦。开始时两人都静止在同一高度。证明在任何时刻两人离地面的高度都相同，并求绳子的移动速率。

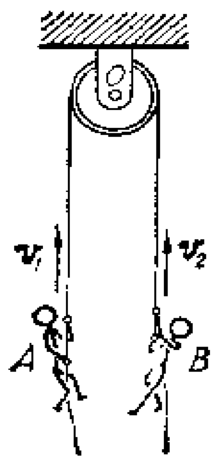


图6.2 体强者与体弱者不分胜负！

解 取人与绳为对象。考虑对轮心O的外力矩：滑轮对绳的作用力都通过O点（因为不考虑摩擦力），所以对O点的力矩为零；作用在两人身上的重力对O点的力矩之和为零，因而所有外力对O点的主矩为零，所以动量矩守恒。初始时刻两人都静止，动量矩为零，以后动量矩保持为零。设 A 上升的绝对速度大小为 v_1，B 上升的绝对速度大小为 v_2，r 为滑轮半径，则任何时刻的动量矩 $(mv_1-mv_2)r$ 应为零，即 $v_1=v_2$。既然每一时刻 A 和 B 上升的速度相同，当然上升的高度是完全相同的。

设绳子的移动速率为 u(与 $\boldsymbol{v}_2$ 同向)，则 $v_1=u_1-u$，$v_2=u_2+u$，代入 $v_1=v_2$，得 $u=(u_1-u_2)/2$。不论 A 与 B 强弱（反映在 u_1 与 u_2 的大小上）如何，他们上升的速度都是一样的。即使 A 不爬，即 $u_1=0$，那么他还是与 B 一样以相同的绝对速度向上升并同时到达顶点。▌

在推导动量矩定理式 (6.3) 时，要求矩心O必须是惯性参考系中的固定点。在实际应用中这一要求很感不便，比如一个滚动

的轮子，对地面上一固定点求动量矩，比对轮子上某一点求动量矩要麻烦得多。现在我们讨论对于任意一个动点，是否存在相应的动量矩定理。

设在惯性参考系中有任意点A，此点的绝对速度是$\boldsymbol{v}_A(t)$。考虑与此点固连在一起的平动参考系$Ax'y'z'$（图6.3），当$\boldsymbol{v}_A$不是常向量，即平动参考系具有加速度时，它就不是惯性参考系了。

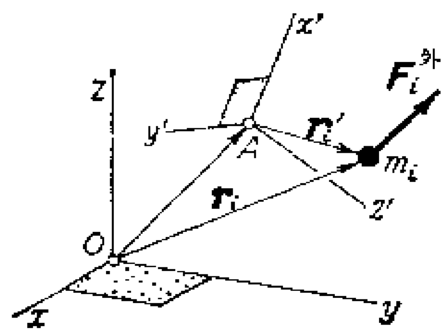


图6.3 $Ax'y'z'$是平动参考系

因为

$$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{OA}+\boldsymbol{r}_i', \qquad (6.5)$$

所以

$$\boldsymbol{L}=\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{外})=\boldsymbol{L}_A+\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{R}, \qquad (6.6)$$

其中$\boldsymbol{L}_A=\sum\boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{F}_i^{外}$是外力对$A$点的主矩，$\boldsymbol{R}$是外力的主向量。这个关系式在第一章中已经得到过（见式(1.14)），差别是目前的A点是动点，而且现在讨论的对象并不一定是刚体。

根据相对运动的原理，质点在平动参考系中的相对速度$\boldsymbol{v}_i'$满足关系式

$$\boldsymbol{v}_i'=\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_A. \qquad (6.7)$$

质点系在平动参考系中对A点的动量矩为$\boldsymbol{G}_A=\sum(\boldsymbol{r}_i'\times m_i\boldsymbol{v}_i')$。将式(6.5)和(6.7)代入，得

$$\boldsymbol{G}_A=\boldsymbol{G}_O-\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{p}-M\overrightarrow{OC}\times\boldsymbol{v}_A+M\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{v}_A, \qquad (6.8)$$

其中$\boldsymbol{p}$是质点系在惯性参考系中的动量，M是总质量，$\overrightarrow{OC}$是质点系质心的向径。

如果将A点取在质点系的质心C上，则由式(6.8)可得

$$\boxed{\boldsymbol{G}_O=\boldsymbol{G}_C+\overrightarrow{OC}\times(M\boldsymbol{v}_C).} \qquad (6.9)$$

此式说明质点系对任意一固定点的动量矩等于相对质心平动参考系的动量矩加上质量集中在质心时质心相对固定点的动量矩。

由式(6.8)得

$$\frac{d\boldsymbol{G}_A}{dt}=\frac{d\boldsymbol{G}_O}{dt}-\boldsymbol{v}_A\times\boldsymbol{p}-\overrightarrow{OA}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}-M\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\times\boldsymbol{v}_A$$

$$-M\overrightarrow{OC}\times\frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt}+M\,\overrightarrow{OA}\times\frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt}.$$

上式右端第二项和第四项可以消去，利用动量定理 $d\boldsymbol{p}/dt=\boldsymbol{R}$ 和动量矩定理 $d\boldsymbol{G}_O/dt=\boldsymbol{L}_O$ 以及式(6.6)，最后可得

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{G}_A}{dt}=\boldsymbol{L}_A+\overrightarrow{AC}\times\left(-M\frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt}\right).}\qquad(6.10)$$

由此可见，对于动点 A（实际上是对于上述平动参考系）来说，一般地式(6.3)那种形式的动量矩定理是不成立的。可以这样解释式(6.10)，因为当 $d\boldsymbol{v}_A\neq0$ 时，平动系不是惯性系，所以式(6.3)不成立。假如在质心上附加一个力 $-Md\boldsymbol{v}_A/dt$，称为惯性力①，并把它看成是作用在系统上的一个外力，那么式(6.10)与式(6.3)的含义就相同了。

在两种特殊情况中，式(6.10)右端第二项为零。一种情况是 $\boldsymbol{v}_A$ 为常向量时，即动点 A 作等速直线运动，此时平动参考系是惯性参考系，方程(6.10)就成为方程(6.3)，即

$$\frac{d\boldsymbol{G}_A}{dt}=\boldsymbol{L}_A.$$

另一种情况是将 A 点就取在质心 C，那么 $\overrightarrow{AC}$ 是零向量。因此不管质心是否有加速度，式(6.10)右端第二项为零，因此有

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{G}_C}{dt}=\boldsymbol{L}_C.}\qquad(6.11)$$

① 详见第八章。

这就是相对于质心平动参考系（它不一定是惯性参考系）的动量矩定理，简称**对质心的动量矩定理**。

总之，动量矩对时间的导数等于外力主矩这个结论，对惯性系中的固定点成立，对质心成立，对其他的动点一般不成立，而要用式(6.10)。

例6.2 两小球 A 与 B 由长为 l 的刚性直杆连结，放在光滑水平面上，两球质量分别为 m 及 $2m$，直杆的质量忽略不计。开始时，对 A 球施以冲击，使它在水平面内具有与直杆垂直的速度 u，而 B 球冲击后的速度为零（图6.4(a)）。在直杆转过半圈时，从空中垂直跌落一质量为 m 的泥块 P，并恰好粘附在小球 A 上。分析直杆与小球的运动。

解 分三个阶段分析。

第一阶段是从对 A 施以冲击后到泥块 P 粘附以前，以 A 与 B 两球为对象，质心 C 在距离 B 点 $l/3$ 处的杆上。由于质点系在水平面内不受外力，动量守恒，所以

$$3mv_C=mu.$$

由此解得质心 C 的速度

$$v_C=u/3.$$

设直杆的角速度为 ω（顺时针方向为正），由相对质心的动量矩守恒可写出

$$m\left(u-\frac{1}{3}u\right)\times\frac{2}{3}l+2m\times\frac{1}{3}u\times\frac{1}{3}l=\left[m\left(\frac{2}{3}l\right)^2+2m\left(\frac{1}{3}l\right)^2\right]\omega,$$

得

$$\omega=u/l.$$

所以在这一阶段中，质心 C 以常速度 $v_C=u/3$ 运动，同时杆以角速度 $\omega=u/l$ 绕质心 C 作匀速转动，如图 6.4 所示。B 点的轨迹为一旋轮线，假想的轮子的中心在 C 点，半径为 $l/3$。A 点的轨迹

如图 6.4(a) 中的虚线所示。

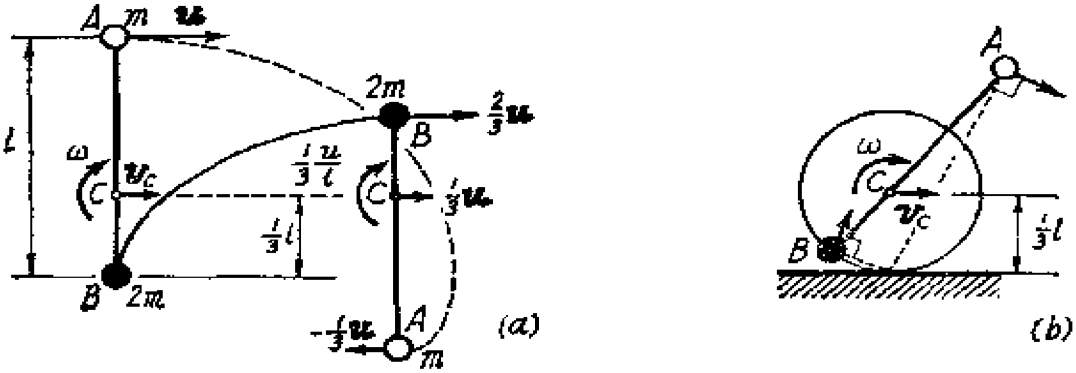


图6.4 碰撞前的运动

第二阶段是泥块 P 的粘附过程，即碰撞过程，以三个质点为对象。由于冲击力是内力，水平外力为零，因此动量及动量矩仍然守恒。此时系统的质心为 C'，它在杆的中点。设泥块粘附后质心的速度为 $v_{C'}$，杆的角速度为 ω'（顺时针方向为正），如图 6.5 所示。由动量守恒，得

$$4mv_{C'} = mu,$$

所以

$$v_{C'} = u/4.$$

由相对质心的动量矩守恒，得

$$2m\left(\frac{2}{3}u - \frac{1}{4}u\right)\times\frac{l}{2} + m\left(\frac{1}{3}u + \frac{1}{4}u\right)\times\frac{l}{2} + m\times\frac{u}{4}\times\frac{l}{2}$$

$$= \left[2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega',$$

所以

$$\omega' = 5u/6l.$$

第三阶段是泥块和杆一起作刚体运动（图6.6）。质心 C' 以常速度 $u/4$ 运动，同时杆绕质心 C' 以角速度 $5u/6l$ 作匀速转动。这个刚体的运动等同于一个纯滚动的轮子，假想的地面在 C' 下面 $3l/10$ 处，即轮子半径为 $3l/10$，滚动角速度为 $5u/6l$。 ▌

＊＊＊ 在上例中适当选择空间的固定点，应用动量矩定理计

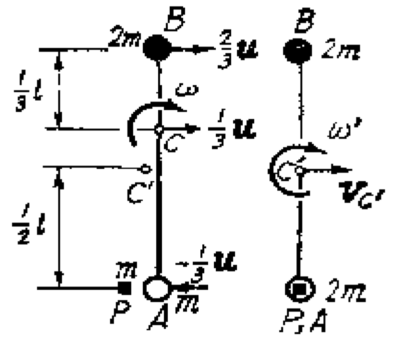


图6.5　碰撞过程中位置不变

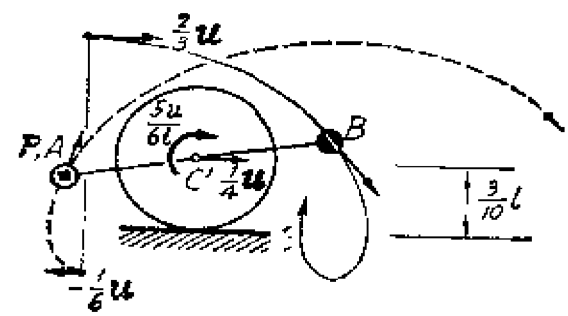


图6.6　碰撞后的运动

算 ω 和 ω'。＊＊＊

＊＊＊　求证：如质心不动（即动量为零），则质点系对任一固定点的动量矩都一样。＊＊＊

＊＊＊　孤立的两质点以万有引力相互作用，写出对质心动量矩守恒的表达式。＊＊＊

6-2　刚体定轴转动动力学

将动量矩定理应用于作定轴转动的刚体，便可解决其动力学问题。

设刚体的转动轴为 Oz 轴，考虑刚体对这根轴的动量矩，有

$$G_z = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{k}.$$

在定轴转动时，刚体上向径为 $\boldsymbol{r}$ 的点的速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},$$

$\boldsymbol{\omega}$ 是角速度向量，方向沿 Oz 轴。该点速度的大小 $v=\rho\omega$，ρ 是该点到转动轴的垂直距离（图6.7）。

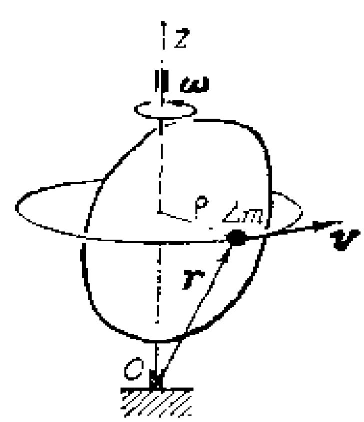


图6.7　在刚体内取质量元

在刚体内取一小块体积，称为质量元，其质量为 Δm，它到转动轴的平均距离为 ρ，则此质量元对 Oz 轴的动量矩为

$$\Delta G_z = \Delta m\rho^2\omega,$$

整个刚体对 Oz 轴的动量矩为

$$G_z=\sum\Delta G_z=\omega\sum(\Delta m\rho^2)①.$$

其中求和应对刚体中全部质量元进行。当对刚体进行无穷小分割时，这个求和号就转化为积分号。

和式（或相应的积分式）$\sum(\Delta m\rho^2)$ 与刚体的运动无关，只与刚体中质量分布有关，它是刚体本身的属性，称为**转动惯量**，或**惯量矩**，记作 J_z，即有

$$J_z=\sum(\rho^2\Delta m) \quad 或 \quad J_z=\int\rho^2 dm.$$

于是，作定轴转动的刚体对该轴的动量矩就等于相应的转动惯量与角速度的乘积，即

$$G_z=J_z\omega. \tag{6.12}$$

转动惯量的量纲是[质量][长度]^2 或 [力][长度][时间]^2。

几何图形比较简单的物体，其转动惯量可以直接由积分 $\int\rho^2 dm$ 求得，特别是在质量均匀分布的情况下，积分更为简单。复杂形状刚体的转动惯量往往通过实验方法测定。

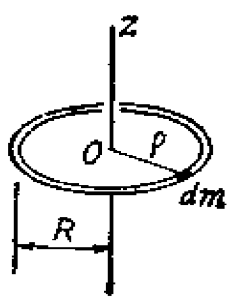


图6.8 $J_z=MR^2$

例6.3 求半径为 R，质量为 M 的均质细环对于垂直于环面的轴的转动惯量（图6.8）。

解 根据转动惯量的定义有

$$J_z=\int\rho^2 dm=\int R^2 dm$$

$$=R^2\int dm=MR^2.$$

在计算中用到了 ρ 是常量这一性质，但是没有用到质量均匀分布这一性质。这说明如果质量不均匀分布，其结果也是一样的。假设整个质量都集中在环上的某几个点(甚至于一个点)上，则求得的 J_z 还是这个值。▌

① 按通常的习惯，ω 是向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的模，它只取正值。但在此式中 ω 应该是 $\dot{\varphi}$，有正负号，表示刚体的不同转向。在作了这样的理解以后，应该认为 ω 带有正负号。

对于一般的刚体，转动惯量不可能超过MR^2_{max}，其中R_{max}是刚体上离转轴最远一点的距离。令

$$k=\sqrt{J_z/M},$$

k 称为**迴转半径**，其量纲是［长度］。可以作这样的解释，在考虑转动惯量时，刚体的质量好像都集中在一个半径为 k 的圆环上，其转动惯量就是$J_z=Mk^2$。或者再简单一些，转动惯量好像是由一个质量为M，离转动轴距离为k的质点所形成的。显然必定有$k\leqslant R_{max}$。

例6.4 长为 l，质量为M的均质细杆，对过一端的垂直轴的转动惯量是(图6.9)

$$J_z=\int\rho^2 dm=\int_0^l x^2\frac{M}{l}dx$$

$$=\frac{1}{3}Ml^2.$$

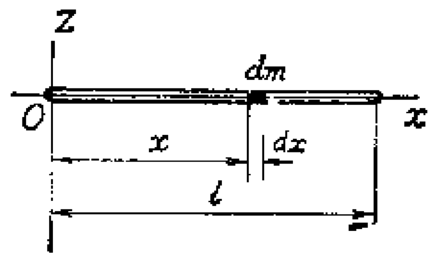
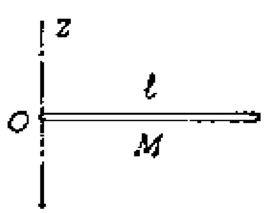
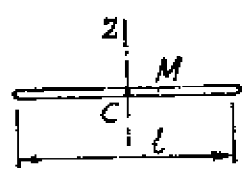
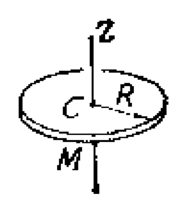


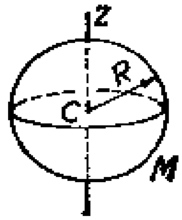
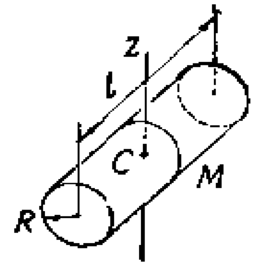
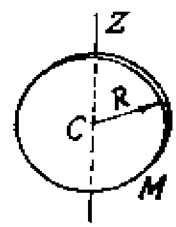
图6.9 $J_z=\frac{1}{3}Ml^2$

因此，相应的迴转半径为

$$k=l/\sqrt{3}\approx 0.577l.$$ ▎

在下表中给出了常见的几种简单几何形状的均质物体的转动惯量和迴转半径，M代表总质量。

细杆	细杆	圆盘或圆柱
		
$J_z=\frac{1}{3}Ml^2$	$J_z=\frac{1}{12}Ml^2$	$J_z=\frac{1}{2}MR^2$
$k=0.577l$	$k=0.289l$	$k=0.707R$

实心球	圆柱	薄圆盘
		
$J_z=\frac{2}{5}MR^2$ $k=0.632R$	$J_z=\frac{1}{12}Ml^2+\frac{1}{4}MR^2$ $k=\sqrt{\frac{1}{12}l^2+\frac{1}{4}R^2}$	$J_z=\frac{1}{4}MR^2$ $k=0.5R$

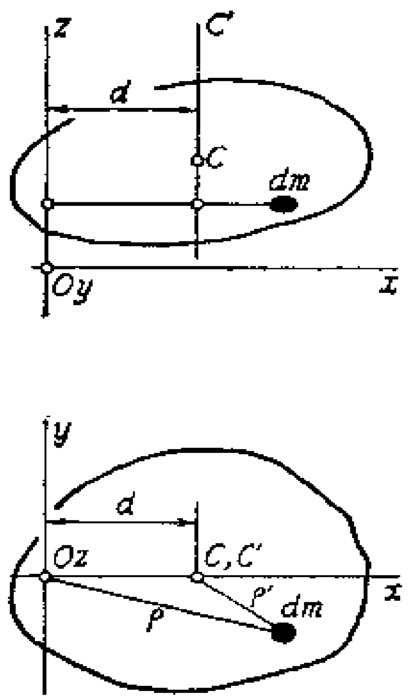


图6.10　平行移轴定理

在转动惯量的计算中，经常要用到下面的平行移轴定理。

设刚体对 Oz 轴的转动惯量为 J_z，过刚体的质心 C 作一与 Oz 轴平行的轴线 CC'，将刚体对 CC' 轴的转动惯量记作 J_C。设 CC' 轴与 Oz 轴之间的距离为 d。下面推导 J_z 与 J_C 之间的关系。

取 x 轴与 CC' 轴相交(图6.10)，则质心的坐标是 $(d,0,z_C)$。设刚体上质量元 dm 所在点的坐标是 (x,y,z)，则该点离 Oz 轴的距离平方为 $\rho^2=x^2+y^2$。按定义

$$J_z=\int(x^2+y^2)\,dm。$$

同一个点离 CC' 轴的距离平方为

$$(\rho')^2=(x-d)^2+y^2,$$

按定义刚体对 CC' 轴的转动惯量为

$$J_C=\int[(x-d)^2+y^2]\,dm$$

$$=\int(x^2+y^2)\,dm+d^2\int dm-2d\int x\,dm.$$

根据质心的定义，$\int x\,dm=Mx_C=Md$，因此上式可以写成

$$\boxed{J_z=J_C+Md^2.}\tag{6.13}$$

这就是转动惯量的**平行移轴定理**：刚体对于任一轴的转动惯量，等于刚体对于通过质心的平行轴的转动惯量，再加上刚体的质量与两轴间距离平方的乘积。

例6.5 由例6.4知，长为 l 的均匀细杆对过一端的垂直轴的转动惯量是 $Ml^2/3$。利用平行移轴定理，可求出过质心（即杆的中点）垂直轴的转动惯量是

$$J_C=Ml^2/3-M(l/2)^2=Ml^2/12.\quad \blacksquare$$

* * *　例 6.4 中给出了迴转半径 $k=l/\sqrt{3}$。设有一平行轴 z' 与轴 z 相距为 k，则对 z' 的转动惯量为

$$Ml^2/3=J_{z'}+M(l/\sqrt{3})^2,$$

由此算得 $J_{z'}=0$。对此结果解释如下：因为全部质量好像集中在离 z 轴距离为 k 的地方，所以对通过此处的轴的转动惯量为零。这样的解释对不对？为什么？ * * *

* * *　求证：刚体的迴转半径大于质心到转动轴的垂直距离。* * *

将式(6.12)代入(6.4)中的第三式，得到

$$J_z\dot{\omega}=L_z\tag{6.14}$$

或写成

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = L_z \tag{6.15}$$

这是刚体定轴转动动力学的基本方程。与刚体质心的动力学方程(5.8)相比，如果将φ与r_C相对应，那么转动惯量就相当于惯性质量M的地位，转动惯量的名称由此而来。

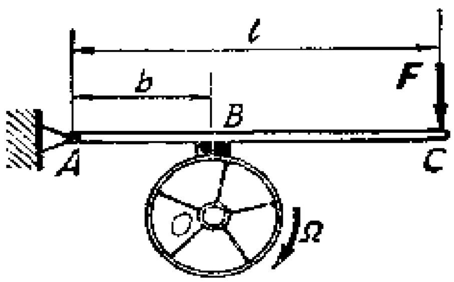


图6.11 刹车

例6.6 飞轮半径为R，迴转半径为k，定轴转动角速度为Ω。在制动杆上加一力大小为F，飞轮转了n转后停止。设l与b（图6.11）已知。求制动块B与轮边之间的滑动摩擦系数μ。

解 制动块与轮边之间的正压力大小N可由AC杆的平衡条件求得，$N=Fl/b$。因此，摩擦力对转动轴的力矩是

$$L_z=\mu NR=\mu RFl/b,$$

其指向与角速度相反。代入式(6.14)中得

$$\frac{d\omega}{dt}=-\frac{\mu RFl}{bMk^2},$$

将上式换元并积分

$$\int_{\omega=\Omega}^{\omega=0} d\left(\frac{1}{2}\omega^2\right)=-\int_0^{n\cdot 2\pi}\frac{\mu RFl}{bMk^2}d\varphi,$$

解得

$$\mu=\frac{bMk^2\Omega^2}{4n\pi FlR}.$$ ▮

例6.7 复摆 设刚体可绕一水平轴O转动（图6.12），C为刚体的质心。已知$\overline{OC}=d$，求此复摆的微振动周期。

解 取OC与竖直线的夹角为φ，根据式(6.15)得刚体的运动微分方程

$$J\ddot{\varphi}=-Mgd\sin\varphi,$$

其中 J 是绕 O 轴的转动惯量。令 $l=J/Md$，方程可以写成

$$l\ddot{\varphi}=-g\sin\varphi.$$

这和长度为 l 的单摆的运动微分方程完全一样，l 叫做**复摆的折合长度**，意思是该复摆的运动相当于具有折合长度的单摆的运动。由于 $J=J_C+Md^2$，J_C 总是正的，所以必定有 $l>d$。利用单摆的结果，立刻可写出复摆的微振动周期为

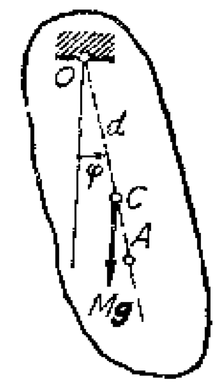


图6.12 复摆

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{J}{Mgd}}.\ \blacksquare$$

* * * 在上例中沿 OC 取 A 点，使 $OA=l$。求证：以过 A 点或 O 点的轴为悬挂轴时，复摆的微振动周期是相同的。A 点称为以 O 为悬挂轴的摆动中心。* * *

例6.8 三线摆 三条长度均为 l 的竖直绳子，等距离地与圆盘相联，将圆盘水平地悬挂起来（图6.13）。在圆盘上放一质量为 M_1 的物体，它绕中心竖直轴的转动惯量为 J。通过圆盘的扭转振动周期求出 J。已知圆盘的质量为 M_0，它绕中心竖直轴的转动惯量为 J_0，它单独作扭转振动时的周期为 T_0。

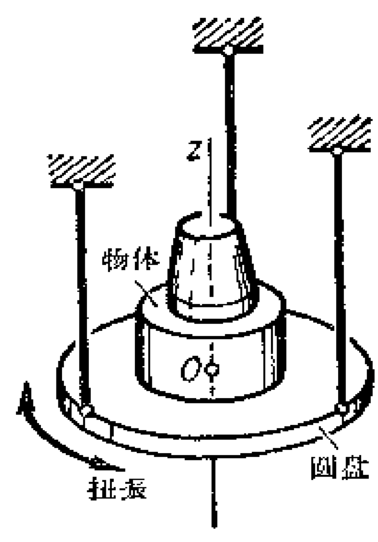


图6.13 三线摆

解 圆盘连同物体绕其中心竖直轴 Oz 作扭转振动时，圆盘在竖直方向的运动距离是转角的二级小量，可以不计。因此在微振动时，可以作为刚体绕定轴转动处理。

设绳内张力的大小为 N（图6.14），此力对 Oz 轴的力矩为

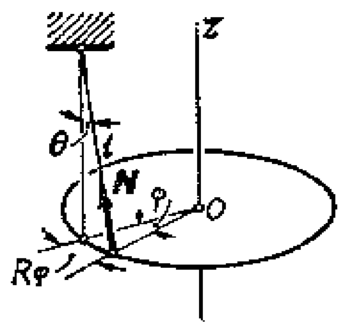


图6.14 计算力矩

$$L'_z = -N\theta R = -NR^2\varphi/l.$$

三根绳的张力对 Oz 轴的合力矩为

$$L_z = -3NR^2\varphi/l = -MgR^2\varphi/l,$$

其中 $M = M_0 + M_1$①. 因为

$$Mg = 3N\cos\theta \approx 3N.$$

于是，转动微分方程为

$$J_1\ddot{\varphi} = -MgR^2\varphi/l.$$

所以微振动周期为

$$T_1 = 2\pi\sqrt{J_1 l/MgR^2}. \qquad (1)$$

因为圆盘单独作扭转振动时有关系式

$$T_0 = 2\pi\sqrt{J_0 l/M_0 gR^2} \qquad (2)$$

以及

$$J_1 = J_0 + J, \qquad (3)$$

所以，将(1)、(2)和(3)联立，消去 J_1 和 J_0，最后可得

$$J = \frac{gR^2}{4\pi^2 l}(MT_1^2 - M_0T_0^2).$$

根据这一关系式，可以通过实验方法分别测出 M_0, T_0 以及 M, T_1，从而算出被测物体的转动惯量 J. 许多实测转动惯量的方法都类似于此，比如可以通过实测复摆的周期反算出转动惯量（见习题6.20）. ▌

例6.9 打击中心 用锤子击钉子，人手握在O处，锤子在 A 处受到冲击力的作用(图6.15)。锤子质心在 C 点，$OA = l$, $OC = b$，锤子质量为M，对过O点的垂直轴的转动惯量为 J_O。问手握在哪里可以不受冲击力的作用?

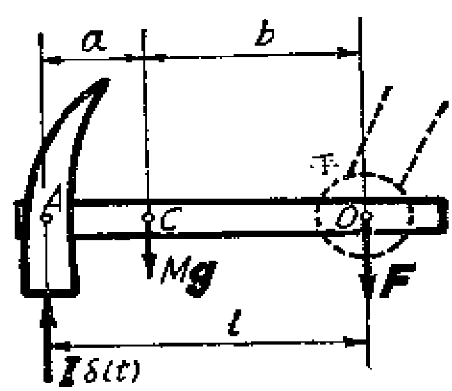


图6.15 人手握在哪里最合适?

① 其实即使三根绳中张力不相同，甚至三根绳不是等距离分布的，最后结果也仍然可用。

解 设钉子对锤子的冲击力为 $I\delta(t)$，于是锤子绕O轴转动的微分方程为

$$J_O\dot{\omega}=lI\delta(t)。$$

质心的切向加速度为

$$a_\tau=b\dot{\omega}=(Ilb/J_O)\delta(t)。$$

设手对锤子把有一个作用力 $\boldsymbol{F}$，其方向垂直于锤子把。由质心运动定理，有

$$(MIlb/J_O)\delta(t)=I\delta(t)-F-Mg,$$

由此解得

$$F=-Mg+I(1-Mlb/J_O)\delta(t)。$$

可见，如果 $l=J_O/Mb$，那么上式右端第二项等于零，F 成为常规力，即手不受冲击力的作用。但 $J_0=Mk^2+Mb^2$，而 $b=l-a$，k 是整个锤子对质心轴 C 的回转半径，a 是 A 与 C 间的距离。由此得

$$l=a+k^2/a。$$

当 l 大于或小于 $a+k^2/a$ 时，手上分别受到不同方向的冲击力的作用。

这个结果说明，如果以O为支点，则作用在 A 处的冲击力不会引起支点O的冲击力，这个 A 点叫做**打击中心**。容易验证，$l=a+k^2/a$ 也可以写成 $l=b+k^2/b$，这两个式子的互易性（a 和 b 可以互换）说明支点O和打击中心 A 是可以互换的：如果以 A 为支点（手握在 A 处），在O点处施加冲击力不会引起 A 点处的冲击力，O是相对于支点 A 的打击中心。

与例6.7中的结果对比，可以看到打击中心与支点之间的距离就是复摆的折合长度，因此摆动中心也就是打击中心。▍

例6.10 一薄板放在光滑水平面上（图6.16），它可绕一固定点O转动。板的质量为 m，绕过O点的竖直轴的转动惯量为 mk^2。有一甲虫 P，其质量也是 m，从板上的 A 点沿 OA 的垂直线 AB 爬行。设 $OA=a$，开始时板和甲虫都是静止的。求证：薄板的

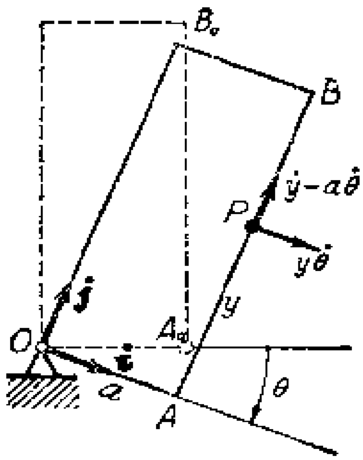


图6.16 求薄板的最大转角

转角不超过 $\pi a/(2\sqrt{a^2+k^2})$。

解 以甲虫和板为对象。设甲虫 P 沿 AB 爬过的距离为 y，薄板转角（顺时针）为 θ，于是 P 的速度为

$$\boldsymbol{v}=y\dot{\theta}\boldsymbol{i}+(\dot{y}-a\dot{\theta})\boldsymbol{j}.$$

系统对 O 轴的动量矩守恒，由于初始时刻为零，所以在任意时刻也为零，故有

$$m[a(\dot{y}-a\dot{\theta})-y^2\dot{\theta}]-mk^2\dot{\theta}=0,$$

解得

$$\frac{a\,dy}{a^2+k^2+y^2}=d\theta.$$

初始时刻 $y=0$，$\theta=0$，由上式积分得

$$\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}\,\mathrm{arc\ tg}\left(\frac{y}{\sqrt{a^2+k^2}}\right).$$

当 $y\to\infty$ 时，θ 的极限值为

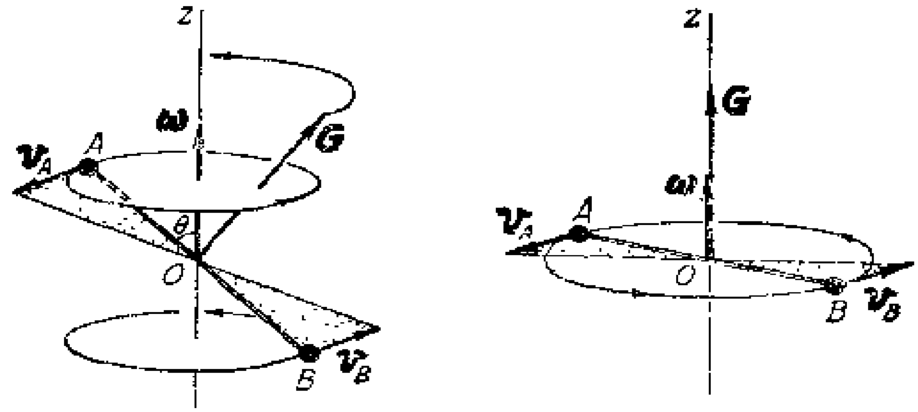
$$\theta_{\max}=\pi a/(2\sqrt{a^2+k^2}).\ \blacksquare$$

*** 用惯了木把锤子的人改用同样尺寸的铁把锤子时，如果还是握住同样的位置，往往会震得手痛。用打击中心的理论说明，手应往哪边挪动才能减小冲击？***

*** 冰面上有一条木板（当作细杆处理），已知其质量和长度。有一质量为已知的重铁球，以已知的水平速度垂直地撞击木板的一端，问撞击后小球和木板怎样运动？木板上哪一点的瞬时速度为零？***

*** 质量为M，半径为R的均匀薄圆板，在光滑水平面上绕其圆心以等角速ω旋转，突然用手指摁住其边缘上一点使圆板绕该点旋转，然后再将手指放开，问以后圆板将作怎样的运动？***

上面已经看到，在研究刚体定轴转动问题时，往往只需考虑动量矩在定轴上的投影 G_z 以及相应的力矩 L_z 就可以了，但是这决不是说定轴转动刚体的动量矩（作为向量）一定是沿着定轴的方向（或说是角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向）。最简单的例子如图 6.17 所示，A 与 B 为由轻刚杆相连的两质点，Oz 为转动轴，θ 为 AB

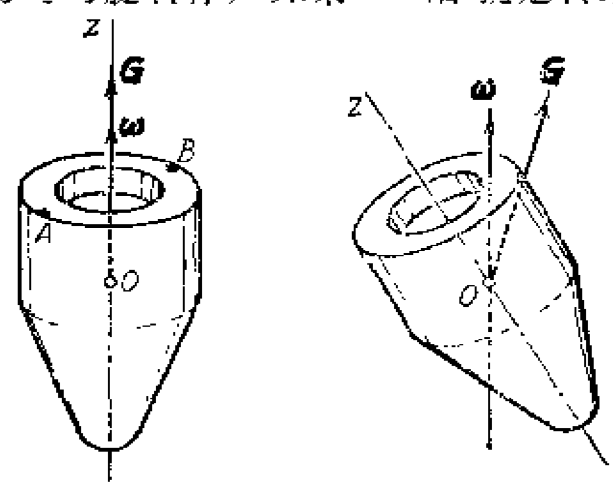


(a) $\boldsymbol{G}$与$\boldsymbol{\omega}$不平行　　(b) $\boldsymbol{G}=J\boldsymbol{\omega}$

图6.17　动量矩 $\boldsymbol{G}$ 与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 平行吗？

线与 Oz 轴的夹角。显然，只有当 $\theta=90°$ 时（图6.17(b)）$\boldsymbol{G}$ 才沿转动轴。关于一般情况下刚体的动量矩以及转动惯量问题，将在第九章中详细讨论。这里只讲一个在 6-4 中将要用到的结果。

设刚体是对 Oz 轴对称的均匀旋转体，如果 Oz 轴就是转动轴（图6.18(a)），则对于刚体上任一点 A 处的质量元 Δm，可以在对称点 B 处找到同样的质量元 Δm，这两点的动量矩向量和是沿转动轴的，对所有质量元求和后显然刚体的动量矩 $\boldsymbol{G}$ 与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 平行，且 $\boldsymbol{G}=J\boldsymbol{\omega}$ 成立。如果旋转



(a) $\boldsymbol{G}=J\boldsymbol{\omega}$　　(b) $\boldsymbol{G}$ 与 $J\boldsymbol{\omega}$ 不平行

图6.18　旋转体的动量矩

体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 不是沿它的对称轴 Oz 的（图6.18 (b)），则 $\boldsymbol{G}$ 一般

不和$\boldsymbol{\omega}$平行。

6-3 刚体平面运动动力学

在运动学中已经知道，刚体的平面运动可以分解为平动和转动两部分，顺此思路就可以解决刚体平面运动的动力学问题。

为了应用质心的动量定理以及对质心的动量矩定理，我们必须把平动参考系的基点选在刚体的质心上，而不能像运动学中那样任意选。

设有一个平面刚体S在平面内运动，作用在它上面的是一个平面力系$\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$。在表示惯性参考系的固定平面上选定合适的坐标系$[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$（图6.19），设刚体质心$C$的坐标为$(x_C,y_C)$。于是，根据质心运动定理，有$M\ddot{\boldsymbol{r}}_C=\boldsymbol{R}$，即

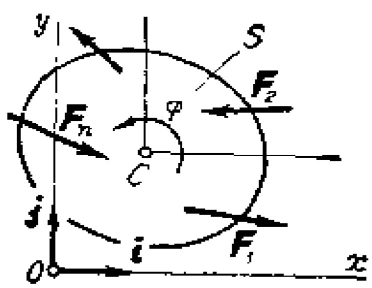


图6.19 刚体的平面运动

$$M\ddot{\boldsymbol{r}}_C=\sum \boldsymbol{F}_i,$$

或写成分量形式

$$\boxed{M\ddot{x}_C=R_x,\qquad M\ddot{y}_C=R_y,}\tag{6.16}$$

其中M为刚体的质量，$R_x=\sum F_{ix}$和$R_y=\sum F_{iy}$是外力主向量的分量。根据对质心的动量矩定理，取式(6.11)在$\boldsymbol{k}$方向的投影式

$$\frac{dG_{Cz}}{dt}=L_{Cz},$$

或写成

$$\boxed{J_C\ddot{\varphi}=L_{Cz},}\tag{6.17}$$

其中J_C是刚体对过质心的轴Cz的转动惯量，$L_{Cz}=\sum(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)_z$是对同一轴的力矩。今后在不致引起误会的情况下，就将上式简写成$J\ddot{\varphi}=L$。

式(6.16)和(6.17)联立在一起就是刚体平面运动动力学的基

本方程组。如果给定了外力以及刚体的初始状态，即给定 $t=0$ 时 x_C、y_C、φ 及 $\dot{x}_C$、$\dot{y}_C$，$\dot{\varphi}$ 的值，则可从上述方程组中确定未知函数 $x_C(t)$，$y_C(t)$ 以及 $\varphi(t)$，它们表达了任意时刻刚体的运动状态。

我们看一看几种特殊情形。

如果刚体静止，或者平衡（质心作等速直线运动，且刚体绕过质心的轴作等角速转动），即有条件 $\ddot{x}_C=\ddot{y}_C=\ddot{\varphi}=0$，则由方程（6.16）和（6.17），得出

$$R_x=0,\ R_y=0,\ L_{Cz}=0。$$

反之亦然。因此，我们可以说刚体的平衡条件是由动力学基本方程给出的[①]。

如果刚体作平面平动，即 $\ddot{\varphi}\equiv 0$，则式(6.16)和质点动力学方程一样，而式(6.17)成了 $L_{Cz}=0$，这就是刚体不转动（或作等角速转动，即 $\dot{\varphi}$ ＝常量）的条件。

刚体的定轴转动是平面运动的特殊情况，因而也可以作为平面运动问题处理。当定轴恰好经过质心 C 时，则 $\ddot{x}_C=\ddot{y}_C=0$，所以式(6.16)成为

$$\sum F_{ix}=0,\ \sum F_{iy}=0,$$

在这个外力和中应该包含定轴对刚体的作用力。式(6.17)就与上一节中式(6.15)完全一致。当定轴不经过质心 C 时，可以用式(6.15)来处理，也可以用式(6.16)和(6.17)的联立式来处理。虽然后者是三个变量的方程组，但因为 x_C、y_C 和 φ 之间有一定的关系，它们只有一个独立变量，所以和前者是等价的。所不同的是，在后一组方程中出现了定轴对刚体的作用力，如果所论及的问题需要求它，当然以选用后者为适宜。反之，选前者为简便。

例6.11 日光灯管（当作均匀细杆）在 A，B 两端用两根平行线挂起(图6.20)。设 B 端的线突然中断，求此时 A 端线中的张

① 在这里我们只涉及平面问题，显然一般的空间问题也有类似的结论。在1-4中我们作为一个基本定理而引进的关于等效力系的条件，其理论根据盖出于此。

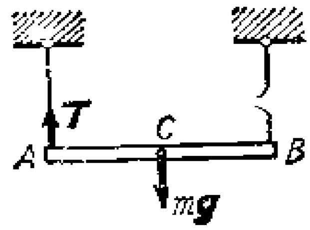


图6.20 T=?

为T。

解 设灯管的质量为m，长为l，y轴向下为正。在B端线中断的瞬间灯管的角加速度的大小为ε。由质心运动定理得

$$ma_{Cy}=mg-T.$$

因为，此瞬时有$a_{Cy}=a_{Ay}+l\varepsilon/2$和$a_{Ay}=0$，故得$a_{Cy}=l\varepsilon/2$。再应用对质心$C$的动量矩定理，有

$$\frac{1}{12}ml^2\varepsilon=\frac{1}{2}Tl.$$

最后解出$T=mg/4$，即线中张力是灯管重量的四分之一。▌

例6.12 设梯子AB的质量为m，长度为l，当作均匀杆处理，靠在光滑的竖直墙和水平地面上（图6.21）。写出梯子的运动微分方程。

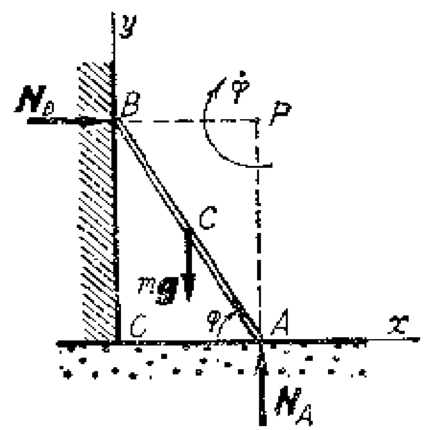


图6.21 $J_P\ddot{\varphi}=L_P$?

解 设φ是梯子与水平地面的夹角，根据方程（6.16）和（6.17）可以写出

$$\begin{cases} N_B=m\ddot{x}_C,\\ N_A-mg=m\ddot{y}_C,\\ N_B(l/2)\sin\varphi-N_A(l/2)\cos\varphi=I_C\ddot{\varphi}. \end{cases}$$

根据运动学关系有

$$\ddot{x}_C=-(l/2)\dot{\varphi}^2\cos\varphi-(l/2)\ddot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$\ddot{y}_C=-(l/2)\dot{\varphi}^2\sin\varphi+(l/2)\ddot{\varphi}\cos\varphi.$$

将它们代入前面的方程中，消去N_A和N_B后得到

$$[J_C+m(l/2)^2]\ddot{\varphi}=-mg(l/2)\cos\varphi.$$

显然，方括号中的量就是梯子对速度瞬心P的转动惯量J_P，而右端是重力对P的力矩（N_A,N_B对P的力矩为零）。因此上式可以写成$J_P\ddot{\varphi}=L_P$这种形式。从形式上看好象对于速度瞬心P也可用动量矩定理，但这需要满足一定的条件[1]。本例的情况恰好是符合这些条件的。如果梯子的质心C不在中点，那么不再有上面$J_P\ddot{\varphi}=L_P$这个结论。▌

＊＊＊　均匀圆盘沿固定曲线作纯滚动，P是接触点。验证对于P点，动量矩定理$J_P\ddot{\varphi}=L_P$也成立。＊＊＊

＊＊＊　求证对于加速度瞬心可以应用动量矩定理。加速度瞬心是刚体上瞬时加速度为零的点。＊＊＊

例6.13 杂耍圆盘　杂技演员使圆盘高速转动，并在地面上向前抛出，不久圆盘可自动返回到演员跟前。分析圆盘的运动。

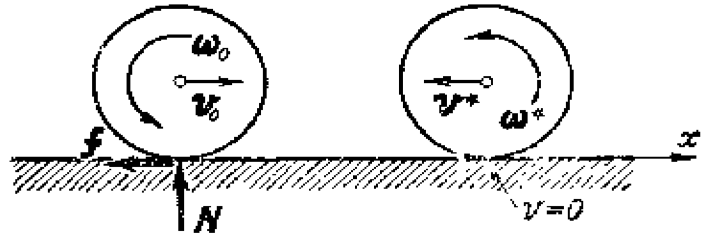


图6.22　圆盘自己会回来吗?

解　设圆盘在开始时盘心速度大小为v_0，角速度大小为ω_0，以后为v和ω，方向如图6.22所示。圆盘半径为R，质量为M，它与地面的摩擦系数为μ。于是圆盘上与地面接触点的速度大小是$u=v+R\omega$。

第一阶段，$u>0$。圆盘相对地面有向前（x的正方向）的滑动，则摩擦力$f=\mu N$，指向负x方向，式中$N=Mg$。由质心运动定理

$$M\frac{dv}{dt}=-\mu Mg,$$

解得

$$v=v_0-\mu gt.$$

[1]　见习题6.33，或者当刚体动瞬心的加速度向量经过质心时，也可以对瞬心用动量矩定理。

由对质心的动量矩定理

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt}=-\mu MgR,$$

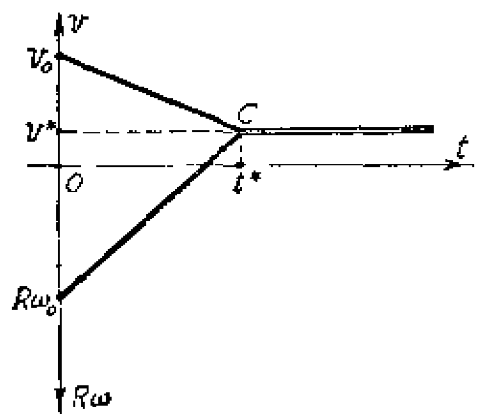
解得

$$\omega=\omega_0-\mu g(2t/R).$$

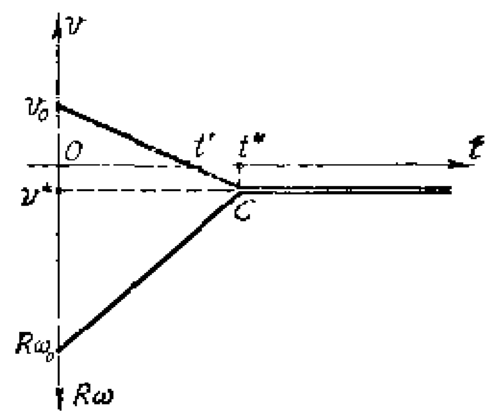
这说明由于摩擦力的作用，圆盘的质心速度的大小 v 越来越小，转动角速度也越来越小。

第二阶段，从条件 $u=0$ 被满足的那个时刻开始，从此以后圆盘相对地面没有滑动，所以不再有摩擦力。又因为圆盘在水平方向没有其他外力作用，所以圆盘将以等角速度无滑动地滚动下去。

将 $v(t)$ 曲线和 $R\omega(t)$ 曲线同画在一张图上（它们的正向一正一反），是两条斜直线（图6.23）。两斜线间的竖直距离等于



(a) $v^*>0$



(b) $v^*<0$

图6.23 是否回来决定于v^* (a) 不会回来；(b) 会回来.

$v+R\omega$，即 u。两斜线在C点相交的时刻 t^* 就是 $u=0$ 刚开始被满足的瞬时。由 $u=0$，解得

$$t^*=(v_0+R\omega_0)/(3\mu g),$$

此时质心的速度大小为 $v^*=v_0-\mu gt^*$。可能有两种情况：$v^*>0$（图6.23(a)）或 $v^*<0$（图6.23(b)）。

当 $v^*>0$ 并且 $t<t^*$ 时，圆盘与地面间有相对滑动，直到

$t=t^*$ 时，盘心速度 $v=v^*$，以后圆盘将继续向前无滑动地滚动下去。显然$v^*<0$ 的情况对应于圆盘可以自己滚回来的条件，由此导出必有

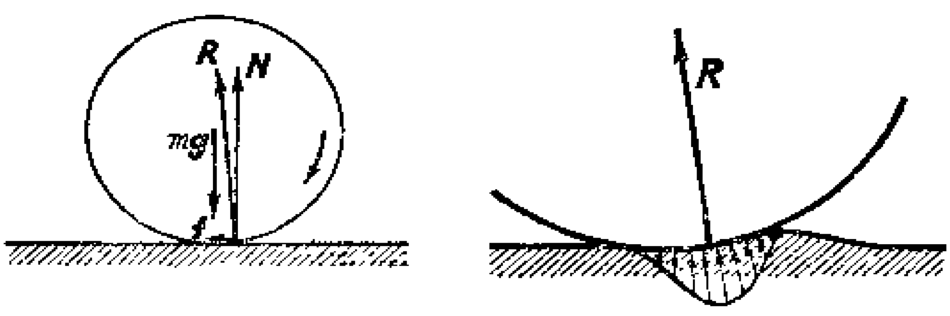
$$\omega_0>(2v_0/R)。$$

在这种情况下（图6.23(b)），在时刻 $t=t'(t'<t^*)$，v 等于零，圆盘开始往回滚。因此它所走的最远距离是 $v_0^2/2\mu g$。在 $t'<t<t^*$ 时间间隔内，它连滚带滑地往回滚，$t=t^*$ 以后就是无滑动地往回滚。

（如果初条件给得很特殊，即 $\omega_0=2v_0/R$，则将出现怎样的运动情况？） ∎

附带说明一下，上例中说，当圆盘上与地面接触的那个点的速度为零以后，圆盘就不再受摩擦力的作用，因此质心的速度和圆盘的角速度将保持常值，即圆盘将永远滚动下去。这一结论显然与实际情况不大相符。实际上，在使圆盘减慢速度直至停止的外界因素中还必须考虑**滚动摩阻**。

滚动摩阻与滑动摩擦的物理本质是完全不相同的，我们只从宏观方面来考察。当圆盘在地面上滚动时，圆盘与地面多少将有一些变形（图6.24），因此地面对圆盘的作用力 $\boldsymbol{R}$ 并不垂直向上，也不是恰好通过圆心的（图6.24(a)）。



(a)　　　　　　(b)

图6.24　什么原因使圆盘停止滚动?

将$\boldsymbol{R}$分解成水平分量 $\boldsymbol{f}$ 和垂直分量$\boldsymbol{N}$。$\boldsymbol{f}$ 是反向阻力，它使得圆盘的质心减速。$\boldsymbol{N}$ 与重力 $m\boldsymbol{g}$ 形成一个力偶，使圆盘的转速 ω

逐渐减小。这个力偶的矩叫做**滚动摩阻力矩**，它与正压力之比称为滚动摩阻系数，这个系数的量纲是[长度]。滚动摩阻的影响一般远远小于滑动摩擦，但是在目前这个例子中，因为无相对滑动，这就必须考虑滚动摩阻才能说明为什么圆盘不会无限地滚下去。

例6.14 相同两杆 AC 和 BC，质量各为 m，长各为 l，在 C 点光滑铰接，静止地放在光滑水平面上，且 ACB 成一直线(图6.25(a))。A 端受到一个垂直于杆的水平冲击力，其冲量为 I，求 A，B，C 三点的速度。

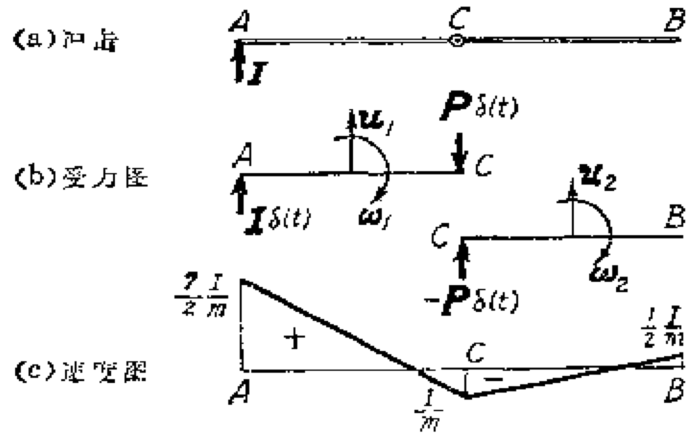


图6.25 杆系受冲击的后果

解 在刚体转动方程中，如果力矩是一个冲击力矩，则刚体的角速度将发生突变，其处理方法类似于5-4中所述。设动力学方程为 $J\dot{\omega}=L\delta(t)$，其中 L 是冲击力矩的代数值，则有

$$\omega(+0)-\omega(-0)=\frac{L}{J},$$

现在利用这个关系式求解。作出 AC 和 BC 的受力图(图6.25(b))，其中 $P\delta(t)$ 表示铰链 C 处两杆相互作用的冲击力。设 u_1 和 u_2 是两杆受冲击后质心的速度，ω_1 和 ω_2 是两杆冲击后的角速度。根据刚体平面运动方程，可得

$$\begin{cases} mu_1=I-P, \\ mu_2=P, \\ (ml^2\omega_1/12)=l(I+P)/2, \\ (ml^2\omega_2/12)=lP/2. \end{cases}$$

上述四个方程包含五个未知量，还要找一个约束关系才能求解。由 AC 杆算出的 C 点速度与由 CB 杆算出的同一点 C 的速度

应该相等，所以有关系式

$$u_1-\frac{l}{2}\omega_1=u_2+\frac{l}{2}\omega_2.$$

由以上五个方程即可解得

$$u_1=5I/4m,\qquad u_2=-I/4m,$$

$$\omega_1=9I/2ml,\qquad \omega_2=-3I/2ml.$$

杆上各点的速度是线性分布的（图6.25(c)）。不难确定

$$v_A=7I/2m,\quad v_B=I/2m,\quad v_C=I/m.$$

方向如图中所示。 ▌

＊＊＊ 在上例中，我们如果对质点系 ACB 用质心运动定理 $(2m)\dot{v}_C=I\delta(t)$，由此得 $v_C=I/2m$，方向向上，这与上面所得结果 $v_C=I/m$，方向向下不符，解释其原因。＊＊＊

6-4 高速对称转子近似理论

在6-2中已讲过，旋转体绕自身对称轴转动时其动量矩向量和角速度向量是平行的。设参考体 S 中装有一个旋转对称体的转子，这个转子在 S 中以相对角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动(图6.26)，J 是转子绕自身对称轴的转动惯量，则刚体在参考体 S 中的动量矩是

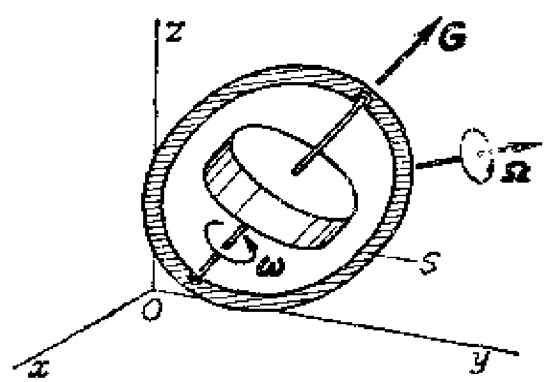


图2.26 装在参考体S上的转子

$$\boldsymbol{G}=J\boldsymbol{\omega}.$$

如果参考体 S 本身在惯性系（图中用 $Oxyz$ 表示）中运动，它的瞬时角速度为 $\boldsymbol{\Omega}$。考虑**高速转子**，即 $\omega\gg\Omega$ 的情况，$\boldsymbol{\Omega}$ 称为**进动角速度**。严格地说，转子相对惯性系的动量矩将依赖于 $\boldsymbol{\Omega}$，但作为一种近似处理方法，可以认为高速转子在惯性空间中对质心的动量矩与 $\boldsymbol{\Omega}$ 无关，它仍然是 $\boldsymbol{G}=J\boldsymbol{\omega}$。

当参考体 S 缓慢运动时，$\boldsymbol{\omega}$ 向量本身也在缓慢地运动，对应地 $\boldsymbol{G}$ 的方向也在缓慢地运动。在惯性系中用质心的动量矩定理，得到

$$J\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\boldsymbol{L},$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 是作用在转子上的外力矩，通常这个力矩是参考体 S 通过与转子的接触处（如轴承）而作用的。反过来，高速转子对 S 的反作用也是一个力矩，这个力矩叫做**陀螺力矩**或**迴转力矩**[1]，它等于

$$-\boldsymbol{L}=-J\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

向量$\boldsymbol{\omega}$大小不变，如果把它看成是一个"刚体"，那么它在空间的瞬时角速度是$\boldsymbol{\Omega}$。根据刚体运动学的结论，$d\boldsymbol{\omega}/dt$ 就是向量 $\boldsymbol{\omega}$ 端点的速度，它应该为$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}$。最后得到陀螺力矩

$$\boxed{-\boldsymbol{L}=J\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega}.}$$

必须强调指出，陀螺力矩是转子作用在其他物体上的力矩，而转子所受的力矩则是陀螺力矩的反作用力矩。

* * *　应用陀螺力矩解释滚铁环（孩子玩具）的原理。* * *

例6.15　轮船上涡轮的转子轴 AB 是水平的（图 6.27），其角速度为$\boldsymbol{\omega}$。设轮船航向改变时具有角速度$\boldsymbol{\Omega}$，求轴承 A，B 处由于转弯而受到的附加压力。已知转子的转动惯量为 J，轴承距离 $AB=l$。

解　当转弯角速度大小 Ω 比转子自转角速度大小 ω 小得多时，可以应用上述近似理论。转子的动量矩 $\boldsymbol{G}=J\boldsymbol{\omega}$，转弯时$\boldsymbol{G}$的方向跟着改变，因而必须有附加的外力矩$\boldsymbol{L}$作用于转子，且

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{G}.$$

这个力矩是由于船体在 A 点对轴有作用力 $\boldsymbol{N}_A$（向下），在 B 点对

[1] 这是"陀螺力矩"这个术语的一种理解，在陀螺理论中还可能有其他的理解，在9-6中将有进一步的说明。

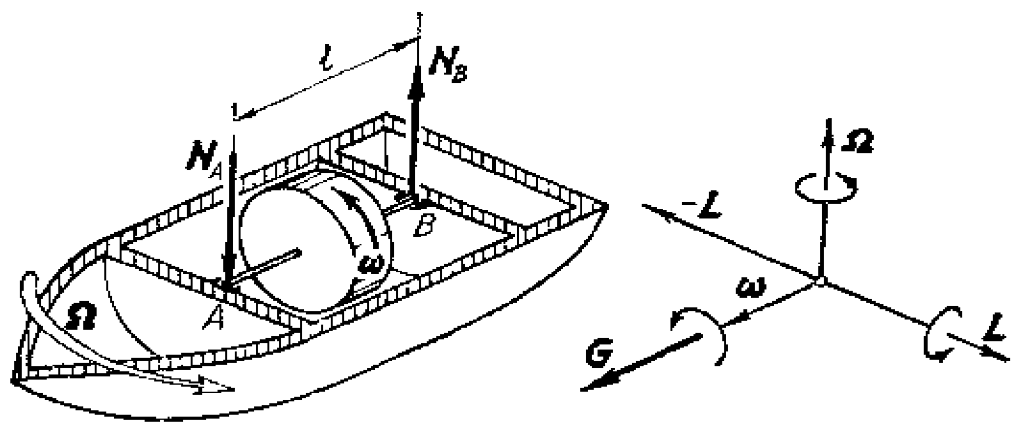


图6.27 船转弯时A，B处有附加压力

轴有作用力 $\boldsymbol{N}_B$（向上）所造成的，它们的大小为

$$N_A = N_B = J\omega\Omega / l.$$

反过来说，转子轴对船体作用一个陀螺力矩 $-\boldsymbol{L}$，使船体在 A 处受到向上的压力，在 B 处受到向下的压力，从而使船头有上抬的趋势。这两个力就是上面所说的 $\boldsymbol{N}_A$ 和 $\boldsymbol{N}_B$ 的反作用力。

设转子的迴转半径 $k=1$ 米，$\omega=6000$转/分，$\Omega=10°/$秒，$l=2$ 米，那么这个附加压力的大小大约是转子自重的 6 倍，其所能造成的后果是不可忽视的。∎

例6.16 玩具陀螺自转角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，设支点 O 固定在地面上不动。由于玩弄者技术不佳，开始时其转轴与竖直线的夹角为θ（图6.28），求转轴的进动角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 的大小。

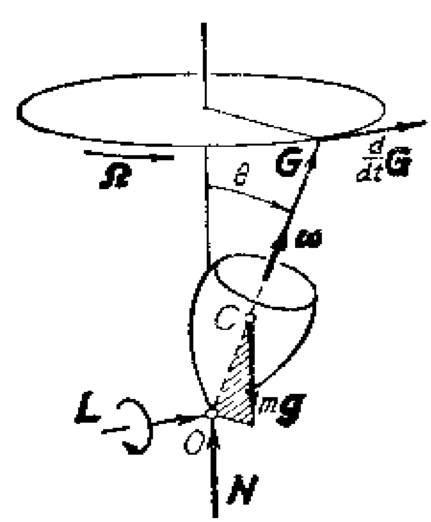


图6.28 陀螺的进动

解 设固定支点 O 处地面作用力的垂直分量为 $\boldsymbol{N}$（水平分量比它要小得多，故不考虑），它与重力 $m\boldsymbol{g}$ 形成一个力偶，力偶矩 $\boldsymbol{L}$ 的大小是 $mgl\sin\theta$，l 是 O

点至质心C的距离。又动量矩$\boldsymbol{G}$的导数，

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{G}.$$

它的大小为 $|\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{G}|=mk^2\omega\Omega\sin\theta$，其中$k$是陀螺的回转半径。根据动量矩定理，有关系式

$$mk^2\omega\Omega\sin\theta=mgl\sin\theta,$$

解得

$$\Omega=gl/k^2\omega.$$

可见，陀螺自转得愈快，进动得愈慢。▌

＊＊＊ 在这个例子中，陀螺力矩是什么？解释为什么高速旋转的陀螺不会倒下。＊＊＊

例6.17 地球是个大陀螺 地球是个扁球体，赤道半径比极半径长21公里，自转轴与公转轴的夹角是23.5°。在冬至时，地球与太阳的相对关系如图6.29右侧所示。太阳对鼓起部分A的引力大于对B的引力，即太阳的引力对地球质心产生一个力矩$\boldsymbol{L}$，在图中是逆时针方向的。在夏至时（图中左侧），这个力矩同样也是逆时针方向的。在春分和秋分时，两部分引力一样大，这个力矩为零。其他时候的力矩大小则处在零与最大值之间，逐日在改变。

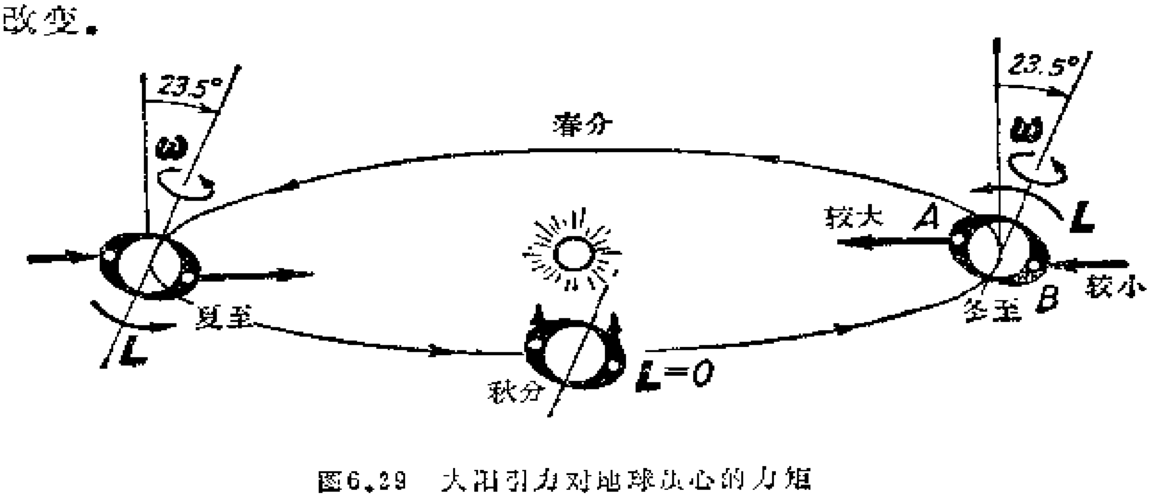


图6.29 太阳引力对地球质心的力矩

除了太阳引力引起的力矩外，月亮也引起附加的力矩。月亮引起的力矩约是太阳所引起的两倍。这些力矩作用的结果使地球自转轴在地心参考系中产生进动，当然进动十分缓慢。由于进动，地轴在地心参考系中画出一个锥面（图6.30），进动周期大约是25,800年。由于进动，从地球上看，春分点和秋分点的位置将会改变，地轴指向天球的位置——北极点也在缓慢转动，它不是永远指向现在所指的小熊星座，这种现象叫做**岁差**①。早在古希腊，天文观察已注意到岁差现象。我国在晋代关于岁差方面的观察成果，当时在世界上处于领先地位。▌

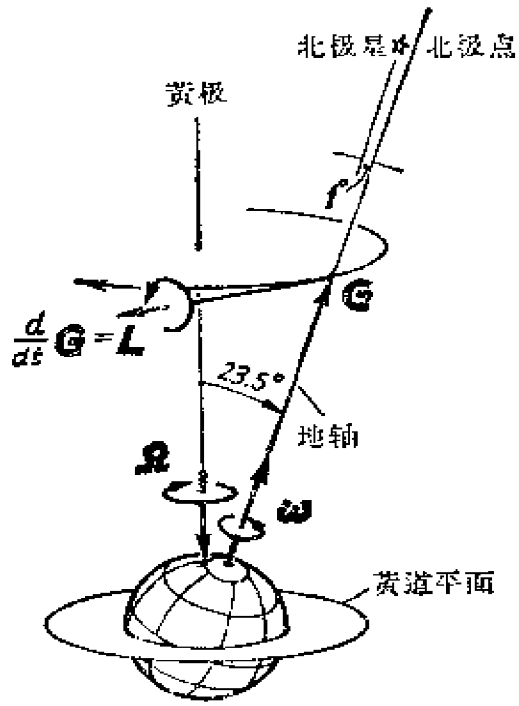


图6.30 岁差现象

在微观世界中，也有类似的陀螺进动现象。原子磁矩绕外磁场方向作进动，而磁矩起源于它自身的动量矩，即自旋。又如电子除了轨道运动以外，还有自转自由度，所以有固有的自转动量矩或自旋。当然在微观世界中，处理方法不同了，因为情况有了根本的改变。比如在那里牛顿定律一般不再成立；自转动量矩对于宏观刚体来说是连续变化的，而基本粒子的自旋是量子化的等等。但是，动量矩守恒定律在微观世界中仍然是有重要意义的，它是自然界中的一个普遍规律。

① 岁差和进动在英文中是同一个字，precession。

习　　题

6.1　在具有水平轴的滑轮上悬有一根绳子，绳子的两端距通过滑轮轴的水平面之距离分别为 l_1 和 l_2。两个质量分别为 m_1 和 m_2 的人抓着绳子的两端，他们同时开始向上爬并同时到达滑轮轴所在的水平面。假定滑轮的质量可忽略，且所有对运动的阻力都不计，求两人同时到达的时间。

6.2　一人在水平台上走动，此台可绕通过其中心的竖直轴自由转动。人走的轨迹是以平台之中心为圆心，半径为 r 的圆周。假定人重为 P，平台对转动轴的转动惯量为 J。初始时人和台都是静止的，以后人相对平台的角速度为 ω，求平台转动的绝对角速度。

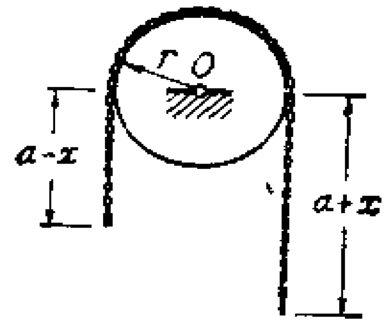
6.3　两个刚体互不相关地各以角速度 ω_1 和 ω_2 绕同一轴同向转动。已知两刚体对于这转轴的转动惯量分别等于 J_1 和 J_2。现突然将这两个刚体联结在一起，求此时共同的角速度 ω。

6.4　半径为 R 的圆环平放在光滑水平面上，环上有一甲虫。环和甲虫的质量相等，并且原先都是静止的。以后甲虫相对圆环以等速 v 爬动，求圆环和甲虫的运动。当甲虫沿圆环爬完一周时，求圆环绕其中心转过的角度及圆环中心绕整个系统的质心转过的角度。

6.5　一刚体可绕竖直轴 Z 转动，其转动惯量为 J。外力对 Z 轴的矩 L 为常量，阻力矩与刚体的角速度的平方成正比，比例系数为 a。初始时静止，求角速度的变化规律。

6.6　半径为 r 的滑轮上挂有长为 $2a+\pi r$ 的均匀链条，链条单位长度的重量是 μ，滑轮的转动惯量是 J_O，滑轮轴承处沒有摩擦，滑轮与链条之间沒有滑动。开始时两边悬空长度为 $a-x_0$ 和 $a+x_0$，初速为零，求链条的运动方程（在一边悬空长度变为零以前）和轴承对滑轮的竖直、水平反力，用时间的函数表示出来（图见下页）。

6.7 在光滑的桌面上，一根均质直杆绕过其中心的竖直轴以角速度 ω_0 旋转。若突然固定杆的一端，求杆的角速度。如果再放开，杆的运动又如何？



题 6.6 图

6.8 一均质圆盘，以角速度 ω 绕它边缘上一点 A 在自身平面内转动。若 A 点突然被解脱，同时圆盘边缘上另一点 B 突然被固定，已知 AB 弧所对的圆心角为 α，求圆盘绕 B 点转动的角速度 ω'。

5.9 设 6.2 题中的平台为一边长 $2a$ 的正方形板，人与平台等重，平台的转动轴通过正方形中心且与板面垂直，人以大小不变的相对速度 u 从正方形一顶点开始沿其边行走。求平台的转动角度 θ，表示成时间 t 的函数，并设 $t=0$ 时人与台都是静止的。

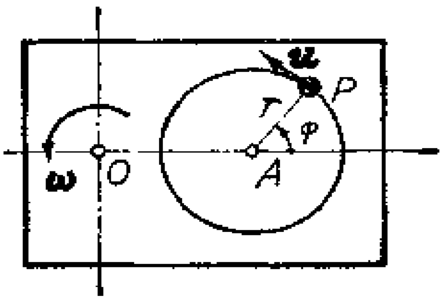
6.10 一均质圆锥体的质量为 M，其对称轴为竖直轴，尖端向上。圆锥可绕其对称轴自由转动。在其表面上沿母线刻有一细槽。初始时，圆锥绕其对称轴的转动角速度为 ω_0。现有一质量为 m 的小球无初速地自槽的上端放入，求当小球滑出槽时圆锥的角速度。

6.11 质量为 m 的质点 P 位于一水平平板上，此平板可绕竖直轴 O 转动。质点 P 在板上作圆周运动，其相对速度的大小 u 不变。此圆的半径为 r，圆心 A 到转动轴的距离 $OA=l(>r)$。求平板的转动角速度 ω 与点 P 在平板上的位置 φ 角之间的关系。已知平板的转动惯量为 J，且当点 P 距转轴最远时平板的角速度为零。不计轴承摩擦和空气阻力（图见下页）。

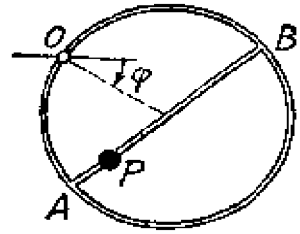
6.12 图示框架（一圆环及其直径）的线密度为 ρ，圆环半径为 a，O 为固定点。质量为 $a\rho/3$ 的甲虫 P 沿杆 AB 爬动，开始时甲虫在 A 点处，系统静止。设 AP 距离为 x，证明：

(1) $[n^2a^2+(a-x)^2]\dot{\varphi}=a\dot{x}$，其中 $n^2=12\pi+9$；

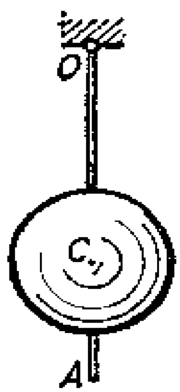
(2) 当甲虫爬到 B 点时，$\varphi=\dfrac{2}{n}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{n}$。



题 6.11 图



题 6.12 图



题 6.13 图

6.13 一摆由细杆 OA 和串在杆上的均质球构成，球的质量为 m，半径为 r，重心 C 在杆的轴线上。不计杆的质量，欲使摆在微小摆动时的周期为 T，问距离 OC 应为多少？

（提示：均质实心圆球相对其直径的迴转半径的平方等于 $2r^2/5$。）

6.14 复摆由长为 $2a$，质量为 M 的杆 AB 和正方形均质薄板构成，板的质量为 $64M$，边长为 $a/8$。悬挂点 A 在板的对角线的延长线上，并与板中心的距离为 x。复摆在板平面内摆动。设单根杆的摆动周期为 T_0，为使加上方块后摆动周期为 $3T_0/2\sqrt{2}$，问距离 x 应取多少？

6.15 一摆由一直杆与固定于杆端之空心球壳所组成，二者的质量均可不计。球内第一次装满的是液体，不计液体与球壁之间的摩擦。第二次球内装满的是与液体同密度的固体，固体与球壳无相对运动。设空心球半径为 b，球心与摆的悬挂点距离为 a（$>b$），求这两种摆的折合长度。

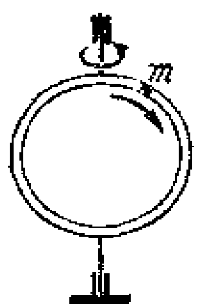
6.16 均质矩形薄板 $ABCD$ 绕固定轴 AB 摆动，AB 轴与竖直线所成之角 $\alpha=30°$，薄板宽度 $AD=a=0.5$ 米，求薄板的微振

动周期。

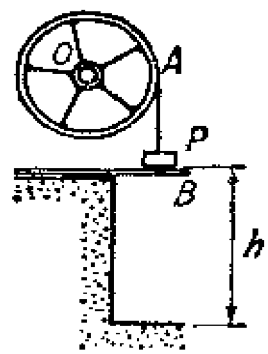
6.17　同质量的两小球 A 与 B 用细杆连接，杆可以在竖直平面内绕固定点 O 自由转动。设 $OA=a$，$OB=b$，不计杆重，求系统的微振动周期。

6.18　均质圆盘的半径为 a，放在粗糙的水平桌面上。圆盘可绕通过盘心的竖直轴转动。已知圆盘与桌面间的摩擦系数为μ，圆盘的初始角速度为ω_0，问经过多长时间后圆盘将静止。

6.19　半径为R的环形管以某一角速度绕通过直径的竖直轴转动，环对此轴的转动惯量为 J。管内有一质量为 m 的小球自最高点无初速地下滑（见图）。求环形管转动的最大角速度与最小角速度之比值。



题 6.19 图

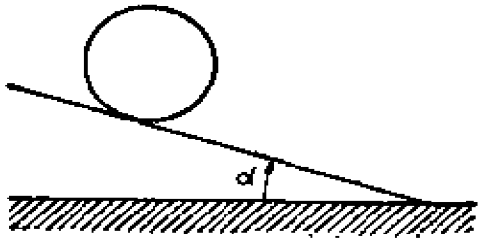


题 6.20 图

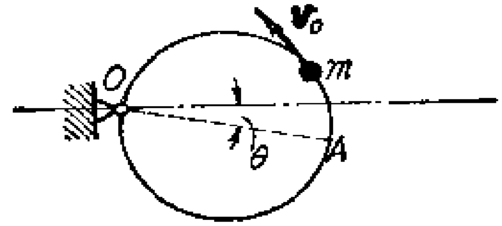
6.20　转动惯量的实验测定。为测定半径为R的飞轮 A 对于其中心轴 O 的转动惯量 J，如图，在飞轮上挂一重量为 P_1 的锤，当撤去板 B 后经时间 t_1 重锤下落距离 h。为了考虑轴承的摩擦力的影响，换一个重 P_2 的锤再做试验，测得下落时间为 t_2。假定摩擦力矩为一常量（与重锤无关），求转动惯量 J 的计算公式。

6.21　重P的均质圆柱体在自身重量的作用力下，沿倾角为α的斜面无滑动地滚动，求圆柱中心的加速度、柱对斜面的正压力及阻止圆柱滑动的摩擦力（图见下页）。

6.22　一均质金属圆环，半径为 r，质量为m，平放在光滑水平面上。圆环可以绕圆周上一固定点 O 自由转动。环上的 A 点



题 6.21 图



题 6.22 图

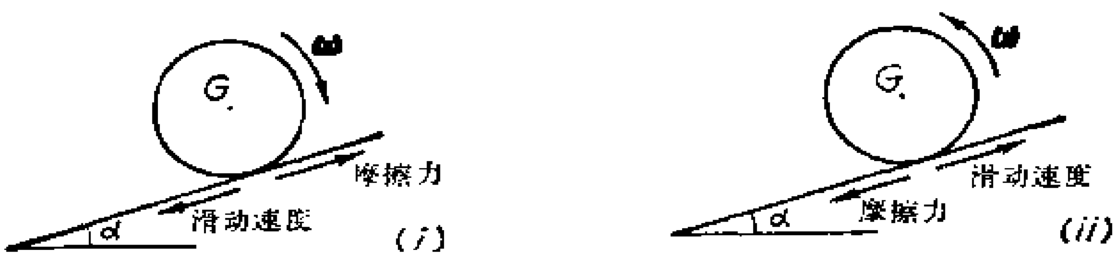
与O点处在同一直径上，且A点处有一质量为m的甲虫，初始时系统静止，后甲虫突然以大小不变的相对圆环的速度v_0运动。求证，经过时间t直径OA转过的角度为

$$\theta=\frac{v_0t}{2r}-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\text{tg}\frac{v_0t}{2r}\right).$$

6.23 均质的空心球壳和实心圆球，沿着同一斜面自同一高度同时无初速无滑动地下滚，问哪个球滚得快一些？证明：它们经过相等距离所需的时间之比为$5:\sqrt{21}$。

6.24 半径为a的均质圆环在竖直平面内以大小为ω的角速度运动，初始时G点约束不动，以后环与倾角为α的粗糙斜面接触，并同时撤去约束，讨论环以后的运动。已知环与斜面间的摩擦系数$\mu=\text{tg}\,\alpha$（见图）。

（1）证明：如果初始滑动速度沿斜面向下，则圆环中心在时间间隔$a\omega/g\sin\alpha$内保持平衡（从圆环与斜面接触时算起），然后以加速度$g\sin\alpha/2$沿斜面下滚；



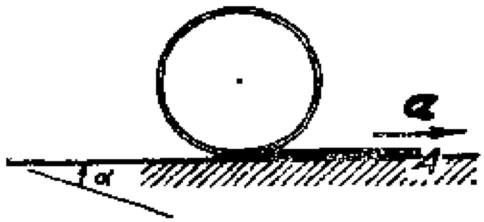
题 6.24 图

（2）再证明：如果初始滑动速度是向上的，则在时间间隔$a\omega/3g\sin\alpha$内圆环以加速度$2g\sin\alpha$下滑，然后以加速度$g\sin\alpha/2$

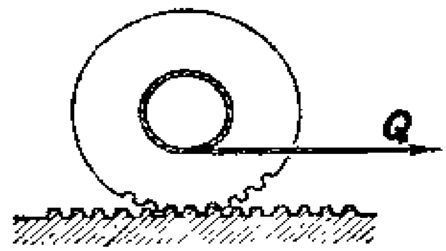
下滚。

6.25　半径为 r 的均质圆柱体，自一倾角为 α 的粗糙斜面上无初速地下滚。圆柱轴线水平，摩擦系数为 μ，分析 α 取不同值时圆柱的运动状况。

6.26　质量为M的均质圆柱体，半径为 r，圆柱外绕以绳子并在倾角为 α 的光滑斜面上运动（见图）。圆柱与绳之间无相对滑动，绳端A以大小为 a 的加速度沿斜面向上移动，求圆柱中心的加速度和绳中张力。



题 6.26 图



题 6.27 图

6.27　有一圆柱体（见图），重量为P，半径为R。相对其中心轴的迴转半径为k，圆柱边上有齿，能在水平齿条上滚动。圆柱中间有凸出的轴颈，半径为 r，颈上绕有绳子，绳子端点作用一垂直于柱轴的水平力大小为Q。求圆柱的运动和齿条对圆柱的水平作用力。

6.28　在上题中假定圆柱无齿，放在粗糙的水平面上，摩擦系数为 μ。研究圆柱的运动和水平力Q的大小之间的关系。

6.29　一圆柱体的质量为M，半径为 r，相对其中心轴的迴转半径为k。圆柱外面绕着柔软而不可伸长的轻绳，放在光滑的倾角为 α 的斜面上（见图），绳子沿斜面向上跨过一固定滑轮并在端点挂一质量为 m 的重物。不计滑轮质量，圆柱与绳之间无相对滑动，初始时系统静止。求

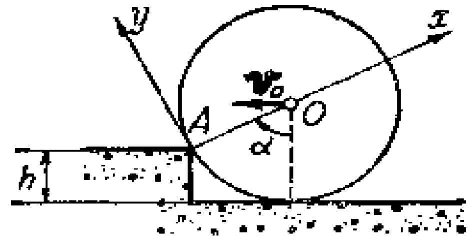
（1）圆柱中心和重物的加速度以及绳中张力；

（2）圆柱仅有转动的条件；

（3）重物不动的条件，并求此时绳中的张力。



题 6.29 图



题 6.30 图

6.30　一均质圆柱体的质量为M，半径为a，沿一粗糙水平面无滑动地滚动。圆心速度大小为v_0。圆柱体撞在一高为$h(<a)$的台阶上，假设碰撞是完全非弹性的，碰撞点A处不产生滑动，求碰撞冲量沿x，y方向的分量（见图）。

如果圆柱和台阶之间的摩擦系数为μ，则不产生滑动时μ应满足什么条件？

6.31　一长为$2a$的均匀杆与竖直线成α角，自高处无初速地落下时与光滑水平面作完全非弹性碰撞。证明：若杆中心下落高度

$$H>\frac{a(1+3\sin^2\alpha)^2}{18\sin^2\alpha\cos\alpha},$$

则杆的下端与地面接触后又立刻离开地面。

6.32　均匀立方体，每边长$a=1$米，沿水平地面平移时遇到地面上的一小木桩而翻倒，问立方体的平移速度至少是多少？假定平移速度垂直立方体的一底边，小木桩碰在底边的中点。

6.33　两相同的质量为M的长度为$2a$的均质杆AB和BC，在B处用光滑铰链相连，并自由地悬挂在A处。初始时系统静止，如在杆端C处作用一水平冲量I，求杆开始运动时B点和C点的速度。

6.34　一串均匀的相同的而且不拘数目的杆子互相用铰链连接着，起初都静止地横在同一条直线上，其中某一根杆子忽然受到一个与杆子垂直的水平冲量。证明：若u，v，w分别代表三根连接着的杆子（其中不能包含有被打击的杆子）的中点受冲击后的速度，则下列关系式成立：

$$u+4v+w=0.$$

6.35 证明：作平面运动的刚体相对于速度瞬心C的动量矩定理有如下的形式

$$J_C\dot{\omega}=L_C+M\omega \boldsymbol{r}_{CG}\cdot \boldsymbol{v}_C.$$

其中G点为质心，$\boldsymbol{r}_{CG}=\overrightarrow{CG}$，$\omega$为刚体的角速度，$J_C$，$L_C$和$\boldsymbol{v}_C$分别表示刚体绕速度瞬心的转动惯量、外力相对速度瞬心C的矩和定速度瞬心C的速度。

6.36 不均匀的圆柱体，质量为M，质心G与几何中心轴O的距离$OG=a$。设α为OG与向下竖直线之间的夹角。初始时，圆柱体静止地横放在粗糙的水平面上，$\alpha=0$，在几何中心O处受一不变的水平力P的作用。证明圆柱体的角速度$\dot{\alpha}$和角加速度$\ddot{\alpha}$满足方程

$$J_C\ddot{\alpha}=Pr-Ma(g+r\dot{\alpha}^2)\sin\alpha,$$

假定运动过程中圆柱体无滑动。

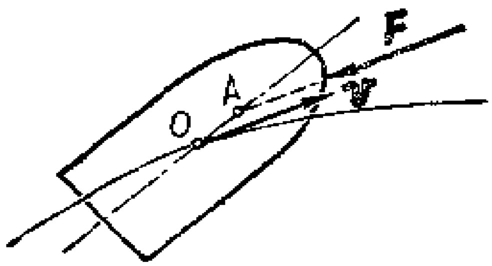
6.37 一陀螺由半径等于15厘米的均质圆盘固连在长为20厘米的均质杆的中间所构成，杆垂直盘面且通过盘心，其自转角速度等于80 1/秒，求它规则进动的角速度。

6.38 飞机发动机的螺旋桨及其转动部分对飞机纵轴的转动惯量$J=0.8$公斤·米·秒²（工程单位制），转速$n=1200$转/分，当飞机以速度$v=40$米/秒在半径$R=25$米的弯道上急转弯时，求转动部分作用在飞机上的陀螺力矩。

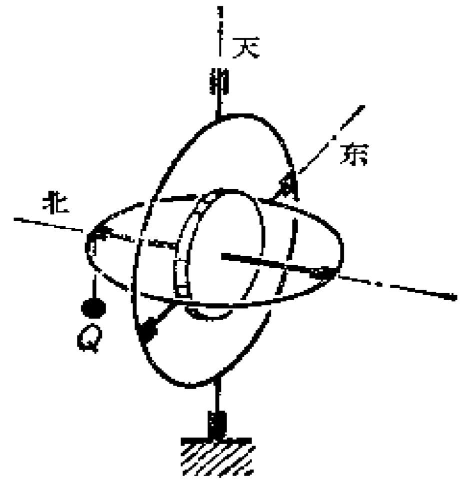
6.39 求炮弹的对称轴OA绕其重心O的轨道的切线旋转一周的时间，假定在旋转一周的时间内轨道切线的方向没有变化。已知空气阻力的合力大小为$F=2140$公斤，方向平行于重心的轨道切线，$\boldsymbol{F}$的作用点为A，$OA=0.2$米（图见下页），炮弹相对其自身旋转轴的动量矩$G=590$公斤·米·秒（工程单位制）。

6.40 图示陀螺仪放在北纬φ度处，转子轴在当地水平位置。转子自转角速度大小为Ω，相对其轴的转动惯量为J。陀螺

仪内环的半径为a，地球转动的角速度是ω，不计摩擦和环的质



题 6.39 图



题 6.40 图

量，欲使转子轴始终指向南北，则在内环转子轴处需挂的重量Q应为多少？

第七章 能量定理

能量是物理学中最基本的概念之一，也是力学中的基本概念。能量是物质运动的一种量度。运动可以有不止一种的量度方法。比如，质量为 m，速度为 v 的质点的运动，可以用动量 mv 来量度，也可以用动能（$mv \cdot v/2$）来量度。当运动涉及几种运动形式的相互转化时，例如摩擦生热，有化学反应而发生爆炸等等，就必须用能量来量度。在第五章中已看到，两个小球碰撞时，如果只采用动量作为运动的量度，那么分辨不出碰撞中是否有机械能转化为热能，因为无论是弹性碰撞还是非弹性碰撞，总动量都是不变的。如果采用动能来量度运动，那么两类碰撞就能够被区别开来。

在物理学中，能量是物质运动的一般量度，各种运动形式相互转化的过程，就是各种形式的能量相互转化的过程。能量的变化可以用功的大小来量度，因此可以说，**物体所具有的能量就是它所具有的作功本领。**

在力学中一般只考虑机械能，即动能和势能。具有动能或势能的物体就具有一定的作功的本领。动能和势能是能量的一部分，分析它们对于理解能量是必要的，但还不是全部。

究竟应该用 mv，还是应该用（$mv \cdot v/2$）来量度运动，在历史上曾经发生过争论。如果从运动形式是否有转化的观点来看，争论的结论应该是很清楚的[①]。

在力学中，质量和力是基本量，由此可以派生出功和能，在

① 详见恩格斯：《自然辩证法》中《运动的量度——功》一篇。恩格斯说："一句话，mv 是以机械运动来量度的机械运动；$\frac{mv^2}{2}$ 是以机械运动转化为一定量的其他形式的运动的能力来量度的机械运动。"

4-6 中我们就是这样做的，在这一章中还将这样做。其实，也可以把功或能作为基本量，质量和力作为导出量，在第十章分析力学中将开始往这个方向转移。历史上和近代都存在着这两种平行的研究途径——人们从不同的侧面去认识和描述机械运动。

7-1 功

设有一力 $\boldsymbol{F}$ 作用在物体上某一确定点，该点的向径为 $\boldsymbol{r}$。当这个点有微小位移 $d\boldsymbol{r}$ 时，力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所作的元功定义为

$$\delta w=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}. \tag{7.1}$$

这里我们把元功记作 δw 而不是 dw，因为如果记成 dw 可能引起误解，以为它是某个函数 w 的全微分。当它确实是函数 w 的全微分时我们才改写成 dw。

在某些情况下（比如在例 7.1 中），力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点并不是物体上的确定的点，也就是说力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点在空间的改变量与物体上相应受力点的改变量并不相等，此时力对物体的元功定义可改为

$$\delta w=\boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{v}dt, \tag{7.2}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是物体上受力点的瞬时速度。当力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点始终在物体上的确定点时，式(7.1)中的 $d\boldsymbol{r}$ 与式(7.2)中的 $\boldsymbol{v}dt$ 意义相同，所以定义(7.2)包含了定义(7.1)。

如果在物体上同一点作用有许多力 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$，则合力 $\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{F}_i$ 的元功等于各分力元功的代数和。即

$$\delta w=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i\cdot d\boldsymbol{r}).$$

如果有一个力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$，它的各个力分别作用在质点系的不同点上，各点的向径是 $\boldsymbol{r}_i(i=1,2,\cdots,n)$，则将各个力所作元功的总和称为该力系对质点系的总元功，即

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}\delta w_i=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i\cdot d\boldsymbol{r}_i).$$

当物体的位形发生变化时，如果力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点在空间沿某一条曲线 L，从 A 点移动到 B 点，则力 $\boldsymbol{F}$ 所作的总功为

$$w_{AB}=\int_{\widehat{AB}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}. \tag{7.3}$$

一般说来这个积分与积分路径 L 有关，只有知道路径以后，才能进行具体的计算，至于在什么情况下它与积分路径无关，我们将在 7-2 中叙述。

功是标量，它的值与坐标系的选择无关。因此在进行具体计算时，可以任意选用方便的坐标系。通常选用直角坐标系，则式(7.3)成为

$$w_{AB}=\int_{\widehat{AB}}(F_x dx+F_y dy+F_z dz). \tag{7.4}$$

对于一般的正交曲线坐标系，根据式(2.50)有

$$d\boldsymbol{r}=\sum_{i=1}^{3}h_i dq_i \boldsymbol{e}_i,$$

其中 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 是单位正交基，h_i 是拉梅系数，dq_i 是坐标 q_i 的增量。于是式(7.3)可以写成

$$w_{AB}=\int_{\widehat{AB}}\left(\sum_{i=1}^{3}F_i h_i dq_i\right)=\int_{\widehat{AB}}\left(\sum_{i=1}^{3}Q_i dq_i\right), \tag{7.5}$$

其中 $F_i(i=1,2,3)$ 是力 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{e}_i$ 方向的投影，而 $Q_i=F_i h_i$。

功的量纲是[力][长度]或[质量][长度]^2[时间]$^{-2}$。在 SI 中功的单位是焦耳，即

1焦耳＝1牛顿·米。

在工程单位制中，力的单位是公斤，因而功的单位是公斤·米。

功对时间的变化率称为功率，记作 N，有关系式

$$N=\frac{\delta w}{dt}=\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{7.6}$$

在 SI 中功率的单位是瓦特，1瓦特＝1焦耳/秒。在工程单位制

中，功率的单位是公斤·米/秒，或马力，1马力＝75公斤·米/秒。

下面是几种常见力的功。

（一）常力的功

设力 $\boldsymbol{F}$ 是常向量，于是根据式(7.3)，由 A 点到 B 点的功为

$$w_{AB}=\int_{\widehat{AB}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}\cdot\int_{\widehat{AB}}d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A). \qquad (7.7)$$

可见，常力的功与路径无关，只与作用点的起点和终点的位置有关。重力属于这种情况。取直角坐标系，z 轴竖直向上，则重力的功为

$$w_{AB}=-mg\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A)=-mg(z_B-z_A).$$

即功的代数值等于重量乘作用点高度的落差。质点上升时重力作负功，下降时作正功。

一个质点系所受重力的总功为

$$W_{AB}=-\sum m_ig(z_{iB}-z_{iA}).$$

根据质心的定义，它的 z 轴坐标

$$z_C=\sum m_iz_i/M,$$

由此得

$$W_{AB}=-Mg(z_{CB}-z_{CA}),$$

即总功的代数值等于总重量乘质心高度的落差。

（二）质点系内力的功

设质点系共有 n 个质点，任意两质点 i 和 j 之间的内力为 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{F}_{ji}$，两质点的向径为 $\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{r}_j$，则这一对内力的元功为

$$\delta w=\boldsymbol{F}_{ij}\cdot d\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{F}_{ji}\cdot d\boldsymbol{r}_j=\boldsymbol{F}_{ji}\cdot d\boldsymbol{r}_{ij}.$$

其中 $\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i$，表示第 i 个质点到第 j 个质点的向径，$\boldsymbol{F}_{ji}$ 表示第 i 个质点对第 j 个质点的内力，并且 $\boldsymbol{r}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{F}_{ji}$ 共线。

设内力 $\boldsymbol{F}_{ji}$ 的大小只与两点间的距离有关，即 $\boldsymbol{F}_{ji}$ 可表示为

$$\boldsymbol{F}_{ji}=F(r_{ij})(\boldsymbol{r}_{ij}/r_{ij}).$$

当 $F>0$ 时表示斥力，反之表示引力。于是元功可以表示成为

$$\delta w = F(r_{ij})(\boldsymbol{r}_{ij}/r_{ij})\cdot d\boldsymbol{r}_{ij} = F(r_{ij})dr_{ij}.$$

如果 $F(r_{ij})$ 是可积函数，则必存在函数 V，使得

$$V(r_{ij}) = -\int_{r_{ij}^0}^{r_{ij}} F(\xi)d\xi.$$

其中 r_{ij}^0 是任意选定的一个常量。于是元功就可以写成一个全微分

$$dw = -dV(r_{ij}).$$

设系统由某个位形(1)运动到另一个位形(2)，即所有的 $\boldsymbol{r}_i^{(1)}$ 变成 $\boldsymbol{r}_i^{(2)}(i=1,2,\cdots,n)$，相应的 $r_{ij}^{(1)}$ 变成 $r_{ij}^{(2)}$，则这一对内力作的功与积分路径无关，有

$$w_{12} = \int_{(1)}^{(2)} dw = V(r_{ij}^{(1)}) - V(r_{ij}^{(2)}). \tag{7.8}$$

由此得出质点系内力的总功为

$$W_{12} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[V(r_{ij}^{(1)}) - V(r_{ij}^{(2)})].$$

具有上述性质的内力经常遇到的有两种：

1.弹性力的功 设质点 i 和 j 之间由弹簧相连，弹簧系数为 k，弹簧原长为 l_{ij}，则弹性力为

$$F(r_{ij}) = -k(r_{ij} - l_{ij}).$$

因此有

$$w_{12} = \frac{k}{2}(r_{ij}^{(1)} - l_{ij})^2 - \frac{k}{2}(r_{ij}^{(2)} - l_{ij})^2.$$

如果在位形(1)时，两点间距离就是弹簧原长，则有

$$w_{12} = -\frac{k}{2}(r_{ij}^{(2)} - l_{ij})^2 < 0.$$

可见，不管以后两点间距离是伸长还是缩短，弹性内力对质点系总是作负功。

2.万有引力的功 因为有

$$F(r_{ij}) = -\gamma m_i m_j / r_{ij}^2,$$

所以内力的功为

$$w_{12} = \gamma m_i m_j \left(\frac{1}{r_{ij}^{(2)}} - \frac{1}{r_{ij}^{(1)}} \right).$$

当两点间距离增加时，引力作负功，反之作正功。

* * * 什么情况下所有内力的功为零？试证明之。* * *

（三）外力对刚体的功

设有外力系 $\boldsymbol{F}_i (i=1,2,\cdots,n)$ 作用在刚体上，作用点的向径分别为 $\boldsymbol{r}_i (i=1,2,\cdots,n)$。又设刚体质心 C 的速度是 $\boldsymbol{v}_C$，刚体瞬时角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，于是每一点 i 的速度为

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i',$$

其中 $\boldsymbol{r}_i'$ 是作用点相对质心的向径。因此作用点的微小位移为

$$d\boldsymbol{r}_i = d\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{\omega} dt \times \boldsymbol{r}_i',$$

外力的元功是

$$\begin{aligned}
\delta W &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i \\
&= \left(\sum \boldsymbol{F}_i \right) \cdot d\boldsymbol{r}_C + \left(\sum \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i \right) \cdot \boldsymbol{\omega} dt \\
&= \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{\omega} dt. \qquad (7.9)
\end{aligned}$$

这就是说，作用在刚体上所有外力的元功之和由两部分构成，第一部分是平动的功，它等于外力主向量与质心位移的点积；第二部分是转动的功，它等于相对质心的主矩与瞬时角位移的点积。

* * * 如果刚体绕固定轴 Oz 转动，证明外力的元功为 $\delta W = L_z d\varphi$，其中 L_z 是外力对 Oz 轴的矩，$d\varphi$ 为刚体的角位移。* * *

（四）约束力的功

在具体问题中约束力可能是外力，也可能是内力，这要看对象是怎么取定的。约束力的功原则上与非约束力的功的含义没有什

么区别，但是由于约束力的规律与运动本身有关，在解出运动以前，往往不可能算出它的功。下面我们只讲几个约束力作功为零的例子。在4-8中已说过，固定光滑面的约束力沿法线方向，对于被限制在这种曲面上的质点来说，约束力作的功为零。后面例7.1中将说明，刚体在一固定表面上作无滑动的滚动时，摩擦力作功为零，同时法向力作功显然为零，所以在这种情况下约束力作功为零。

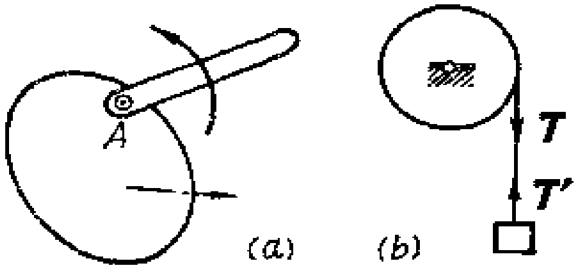


图7.1　约束力不作功的例子

图7.1所示的两种情况也是约束力作功为零的例子。在图7.1(a)中，以圆盘和直杆作为研究对象，光滑铰链A之间的约束力是内力，在铰链本身有位移时，虽然一对内力中的任何一个作功不为零，但是一对内力作功之和等于零。同理张紧的不可伸长的柔绳（图7.1(b)）中的一对张力$\boldsymbol{T}$和$\boldsymbol{T}'$作功之和也为零。

如果把刚体内所有内力看成是约束力，内力都是成对出现的，虽然对于任何单个内力来说作功不一定等于零，但是所有内力作功之和等于零。

例7.1　半径为R的轮子在地面上滚动（图7.2）。设轮心O的速度是$\boldsymbol{v}$，轮子的角速度是ω，指向如图所示。讨论地面对轮子的摩擦力$\boldsymbol{f}$所作的元功。

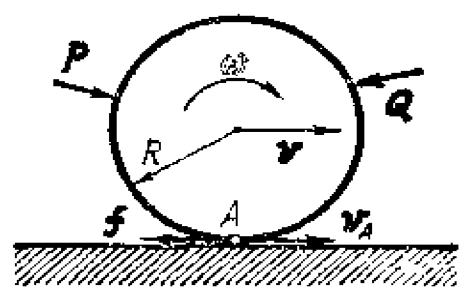


图7.2　摩擦力的功怎样算?

解　摩擦力的方向总是和A点相对地面的速度方向（或运动趋势的方向）相反。

根据元功的定义式(7.2)应有

$$\delta w = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}_A dt.$$

所以 $$\delta w = -f\,|v-\omega R|\,dt < 0\,.$$

这个关系式对于 A 点的速度不论是向左还是向右都成立。$\delta w<0$ 说明摩擦力对轮子作负功。

当轮子作纯滚动，即 $v_A = v-\omega R = 0$ 时，不论 f 向左或向右都有 $\delta w = 0$，说明摩擦力不作功。▎

＊＊＊ 摩擦力能不能作正功？试举例说明。＊＊＊

＊＊＊ 自行车由静到动，靠的是地面对后轮的向前摩擦力。这个摩擦力的元功是否可以这样求：

$$\delta w = \text{摩擦力（向前）} \times \text{自行车向前的距离}$$

因此元功为正？＊＊＊

例7.2 在阻力与速度成正比的落体运动中（例4.3），运动方程是

$$\frac{x}{v^* \tau} = \frac{t}{\tau} - (1-e^{-t/\tau}),$$

速度是

$$\dot{x} = v^*(1-e^{-t/\tau}),$$

其中 $v^* = mg/c$，$\tau = m/c$。求由初始时刻至 3 倍特征时间间隔内外力对落体所作的功。

解 阻力 $R_x = -c\dot{x}$，所以功率是

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v} = -c\dot{x}^2$$

所以由 $t=0$ 至 $t=3\tau$ 时间间隔内阻力的总功是

$$W_1 = -\int_0^{3\tau} c\,\dot{x}^2 dt$$

$$= -c(v^*)^2\int_0^{3\tau}(1-e^{-t/\tau})^2 dt \approx -1.60m(v^*)^2.$$

在此期间重力作的功是

$$W_2 = \int_0^{3\tau} mg\dot{x}dt = mgx\Big|_{t=0}^{t=3\tau} \approx 2.05m(v^*)^2.$$

阻力与重力的合力所作的功为

$$W = W_2 + W_1 = 0.45m(v^*)^2。$$

在这个例子中，重力（地球）对质点作正功，阻力（空气）对质点作负功，合在一起，外力还是对质点作了正功。 ▌

7-2 保守力场与势能

如果质点在一个空间区域内的任意位置上，受到确定大小和方向的作用力，这个力作为向量是位置的单值、有界且可微的函数，则这个区域称为**力场**，力场对质点的作用力称为**场力**。经常遇到的力场有引力场和弹性力场等等。当物体在力场内移动时，一般地场力要作功。如果场力是保守力，则称对应的力场为**保守力场**或**有势力场**。在4-5中曾经指出过，如果力 $\boldsymbol{F}$ 是保守力，即存在单值的可微函数 $V(x,y,z)$，它满足

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} V。\qquad (7.10)$$

这就是说保守力场是某个函数$(-V)$的梯度场。此时，力 $\boldsymbol{F}$ 的元功可写成一个全微分：$dw = d(-V)$，则式(7.3)的积分结果是

$$w_{AB} = \int_A^B d(-V) = -(V_B - V_A), \qquad (7.11)$$

其中 V_A 和 V_B 是势能 $V(x,y,z)$ 在 A 点与 B 点的值，式(7.11)说明保守力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功与积分路径无关。根据高等数学中曲线积分的理论，元功

$$\delta w = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

是某个函数的全微分的充要条件是

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}, \qquad (7.12)$$

又因为保守力场是梯度场，所以它的旋度为零，即

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0。\qquad (7.13)$$

如果力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点由 A 点出发沿路径 L 经过 C 点到 B 点，然后再由 B 点沿路径 L' 经过 C' 点回到 A 点（图7.3），则沿此闭合路径的功为

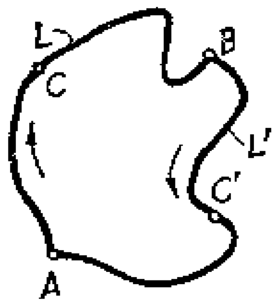


图7.3 沿闭合路径的功

$$\oint_{\widehat{ABA}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\widehat{ACB}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\widehat{BC'A}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

当力 $\boldsymbol{F}$ 满足条件(7.10)时，根据式(7.11)可知上式为零，就是说保守力沿闭路所作之功为零。

保守力场是$(-V)$的梯度场、场力作功与路径无关、沿闭合路径场力作功为零，以及条件(7.12)和(7.13)都是保守力场的等价定义。今后根据需要可随便取一种定义。

例7.3 设有一平面力场（图7.4），场力的规律是

$$\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} \ (-\infty < x, y < +\infty),$$

判断此力场是否保守力场？

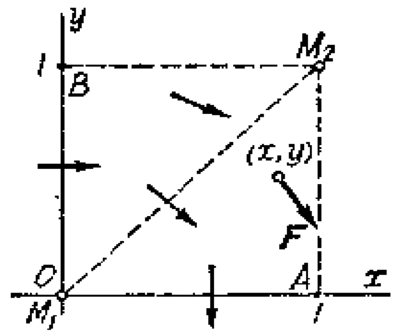


图7.4 是否保守力场？

解 考虑 M_1 和 M_2 两个点，它们的坐标分别为(0,0)和(1,1)，选择两条不同的路径计算场力的功。首先沿直线 M_1M_2，直线方程为 $y=x$，于是有

$$w_{12} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} (y\,dx - x\,dy) = \int_0^1 (x\,dx - x\,dx) = 0.$$

其次沿折线 M_1AM_2，则有

$$w_{12} = \int_{\overline{M_1A}} (y\,dx - x\,dy) + \int_{\overline{AM_2}} (y\,dx - x\,dy) = -1.$$

可见场力作功与路径有关，所以此力场不是保守力场。

利用条件(7.12)更为简单，因为 $F_x = y, F_y = -x, F_z = 0$，则

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

所以力场不是保守力场。 ▌

设在保守力场中有一质点，除场力外还有外力对它作用，考虑此质点“缓慢地”由A点移到B点。所谓“缓慢地”是指移动得非常之慢，以至于在移动过程中每一时刻都可以把质点当作处于平衡状态处理，这种过程叫做**准静态过程**。在准静态过程中，在每一位置上，作用在质点上的外力与场力必然是大小相等，方向相反，因此外力所作的功等于场力作功的负值，根据式(7.3)有

$$w_{AB}^{外}=\int_A^B \boldsymbol{F}^{外}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_A^B(\boldsymbol{F}^{场}\cdot d\boldsymbol{r})$$

$$=V_B-V_A, \qquad (7.14)$$

其中V_A和V_B是函数V在A点和B点的值。因为考虑的是准静态过程，不涉及与速度有关的动能，所以目前所谈系统的能量只与系统的位形有关，称为系统的**势能**或**位能**。当谈到势能时总是指某个系统的势能。考虑由力场（实际上是产生力场的那个物体）和受力质点所组成的系统，当外力作正功（或说外力克服场力作正功）时，系统的势能将增加，即系统以增加能量的方式将外力所作的正功储存起来。反之，当外力作负功时，系统以对外作正功的方式将储存的能量释放出来，系统的势能就减少。

总之，**系统势能的增量**（可正可负）**等于外力对系统所作的功**（正功或负功）．根据式(7.14)，也可以说**系统势能的增量等于场力作功的负值**。

当我们在保守力场中任意选定一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$作为零势能点，即$V(x_0,y_0,z_0)=0$，则根据式(7.14)可知，质点由零势能点准静态地移到力场中任意点$M(x,y,z)$时，外力所作的功就等于$V(x,y,z)$，于是我们就说$V(x,y,z)$等于由零势能点M_0移到点M时系统势能的增量。在这样的意义下，我们就把$V(x,y,z)$叫做系统的**势能**。

根据以上的说明，关于势能我们经常使用一种简化的提法。设质点在保守力场中移动（在动能不改变的情况下）场力作功的

负值就称为该质点的势能。

在保守力场中，势能相同的所有点所组成的曲面称为**等势面**，它的方程是

$$V(x,y,z)=\text{常量}。$$

当此常量为零时，对应的等势面称为零势能面。前面所选定的零势能点只是零势能面上的一个点。当外力使质点在等势能面上由一点移到另一点时，系统的势能没有变化，所以外力不作功。只有当质点由一个等势能面移到另一个等势能面时，系统势能才发生变化。所以我们又可以说系统的势能是将质点由零势能面准静态地转移到数值等于势能值的那个等势面时，外力所作的功。

力场中的**力线**是这样的曲线，在这曲线上任意点处力向量沿曲线的切线方向。由于力场的单值性，过力场中任意点只有一条力线经过，同时也只有一个等势能面经过（奇点除外）。根据场论可知，$\mathbf{grad}\,V$ 的方向沿 $V=$常量这个曲面的法线方向，所以通过力场中任意点的力线和等势能面正交。

以上所说的是考虑只有一个质点在力场中时势能的概念。如果考虑质点系在力场中，则整个系统（包括产生力场的物体及质点系）的势能是指每个质点的势能的总和。

几种常见的保守力场如下：

1.重力场 设质点系由 n 个质点组成，质量分别为 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$，作用在其上的重力为

$$\boldsymbol{F}_i=-m_ig\boldsymbol{k},\qquad i=1,2,\cdots,n。$$

则质点系的势能为

$$V=(m_1z_1+m_2z_2+\cdots+m_nz_n)g=Mgz_C,$$

其中 z_C 是质点系质心的高度坐标。当写成上面这种形式时，我们实际上已经取定 $z_C=0$ 作为零势能面。在重力场中，等势能面 $V=$常量是水平面，力线是竖直线（图7.5）。

2.弹性力场 两质点用弹性系数为 k 的弹簧相连（图7.6），两质点的位置向量分别为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$，它们之间的相对位置向量记

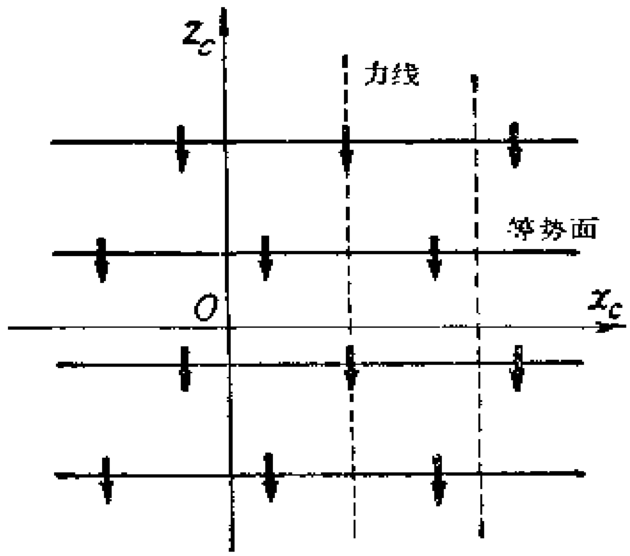


图7.5 重力场

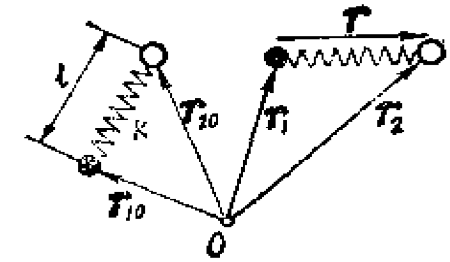


图7.6 弹性力

为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$。取弹簧在原长时的位形为零势能状态(图7.6 中 $\boldsymbol{r}_{10}$ 和 $\boldsymbol{r}_{20}$ 位置)，那么系统由零势能状态转移到新的状态时(图7.6 中 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 位置)，场力（弹簧力）所作的功是

$$w=-\frac{k}{2}(r-l)^2.$$

所以系统的势能为

$$V=\frac{k}{2}(r-l)^2.$$

可见，系统的势能只与两点间的相对距离有关。

3.万有引力场 设有 n 个质点，以万有引力相互作用着，则此 n 个质点所组成的系统的势能为

$$V=-\sum_{j<i}\sum\frac{\gamma m_i m_j}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|}.$$

下面考虑几种特殊情况：

当 $n=2$ 时，有

$$V=-\frac{\gamma m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}.$$

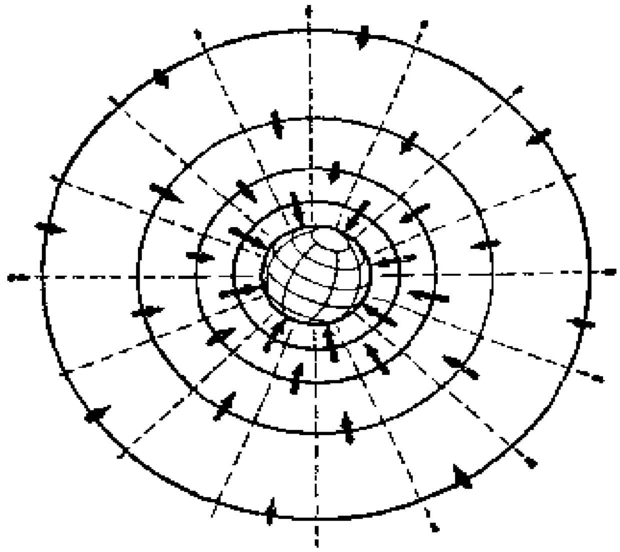


图7.7　固定力心的引力场

如果其中有一个质点不动，那么就是有固定力心的引力场的情况，对应的等势面是以力心为中心的球面（图7.7），力线是经过力心的放射线。比如在研究人造地球卫星的运动时，地球的引力场就取这样的模型。

当$n=3$时，并且假定有两个质点的位置不变，其质量分别为M_a和M_b，第三个质点的质量为m，位置可以移动，则系统的势能为

$$V=-\frac{\gamma mM_a}{r_a}-\frac{\gamma mM_b}{r_b},$$

其中r_a和r_b分别是m至M_a和M_b的距离，对应的等势面和力线如图7.8所示。图中取$\gamma mM_b/R=1$，R是M_a和M_b之间的距离，且$M_b/M_a=1/4$。

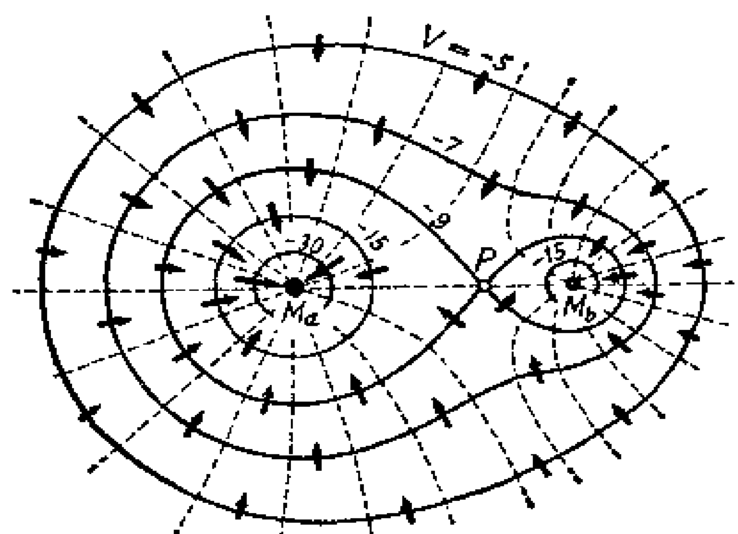


图7.8　双心引力场

例7.4　质量为M，长为l的均质杆AB，可在竖直平面内绕A点自由转动(图7.9)。今在杆上装一个抗扭弹簧，其抗扭刚度是k（扭过单位角度所需的外力矩）。设$\varphi=0$时弹簧处于自然状态，求杆和弹簧所组成的系统的势能。

解 系统的势能可以通过计算外力作功或场力作功而求出，我们采用后一种方法。

设杆的转角为 φ，当 φ 增加到 $\varphi+d\varphi$ 时，重力场作的元功是 $-mgld\varphi\sin\varphi/2$，抗扭弹簧力场作的元功是 $(-k\varphi d\varphi)$，合在一起并写成全微分形式为

$$dw=d\left(\frac{1}{2}mgl\cos\varphi-\frac{1}{2}k\varphi^2\right).$$

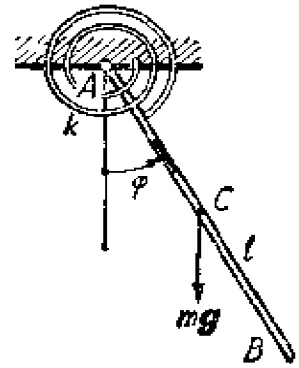


图7.9 求势能 $V(\varphi)$

取 $\varphi=0$ 时为零势能状态，则由 $\varphi=0$ 到某一 φ 值时场力作的功为

$$w=\int_0^{\varphi}d\left(\frac{1}{2}mgl\cos\varphi-\frac{1}{2}k\varphi^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}mgl\cos\varphi-\frac{1}{2}k\varphi^2-\frac{1}{2}mgl.$$

所以势能为

$$V=\frac{1}{2}mgl(1-\cos\varphi)+\frac{1}{2}k\varphi^2. \quad \blacksquare$$

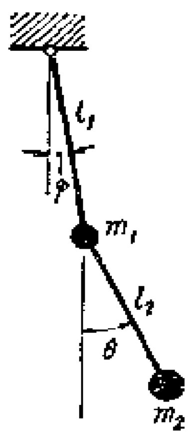


图7.10 双摆

例7.5 双摆由两个质点和两根杆组成（图7.10）。设两质点的质量分别为 m_1 和 m_2，不设杆重，杆长分别为 l_1 和 l_2。求系统的势能。

解 当 φ 和 θ 确定后，系统的位形就被确定了，因此系统具有两个自由度。当系统由位置 $\varphi=\pi/2$ 和 $\theta=\pi/2$ 转移到任意角 φ 和 θ 时，重力场作的功为

$$W=-\int_{\pi/2}^{\varphi}(m_1+m_2)gl_1\sin\varphi d\varphi-\int_{\pi/2}^{\theta}m_2gl_2\sin\theta d\theta$$

$$=(m_1+m_2)gl_1\cos\varphi+m_2gl_2\cos\theta.$$

因此，当选定 $\varphi=\pi/2$，$\theta=\pi/2$ 为零势能状态时，系统的势能为

$$V=-(m_1+m_2)gl_1\cos\varphi-m_2gl_2\cos\theta.$$

令

$$Q_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \qquad Q_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Q_φ 和 Q_θ 叫做对应于广义坐标 φ 和 θ 的广义力①，在这里其量纲与力矩的量纲相同。如果在平面上取一直角标架，$\boldsymbol{i}$ 方向的坐标代表 φ 角，$\boldsymbol{j}$ 方向的坐标代表 θ 角（图7.11），那么

$V(\varphi,\theta)=$常量是一族等势曲线。

取

$$\boldsymbol{Q}=Q_\varphi \boldsymbol{i}+Q_\theta \boldsymbol{j},$$

就有

$$\boldsymbol{Q}=-\text{grad}\, V.$$

所以向量 $\boldsymbol{Q}$ 与式(7.10)中的力 $\boldsymbol{F}$ 相当，与 $\boldsymbol{Q}$ 对应的广义力线和等势曲线正交。

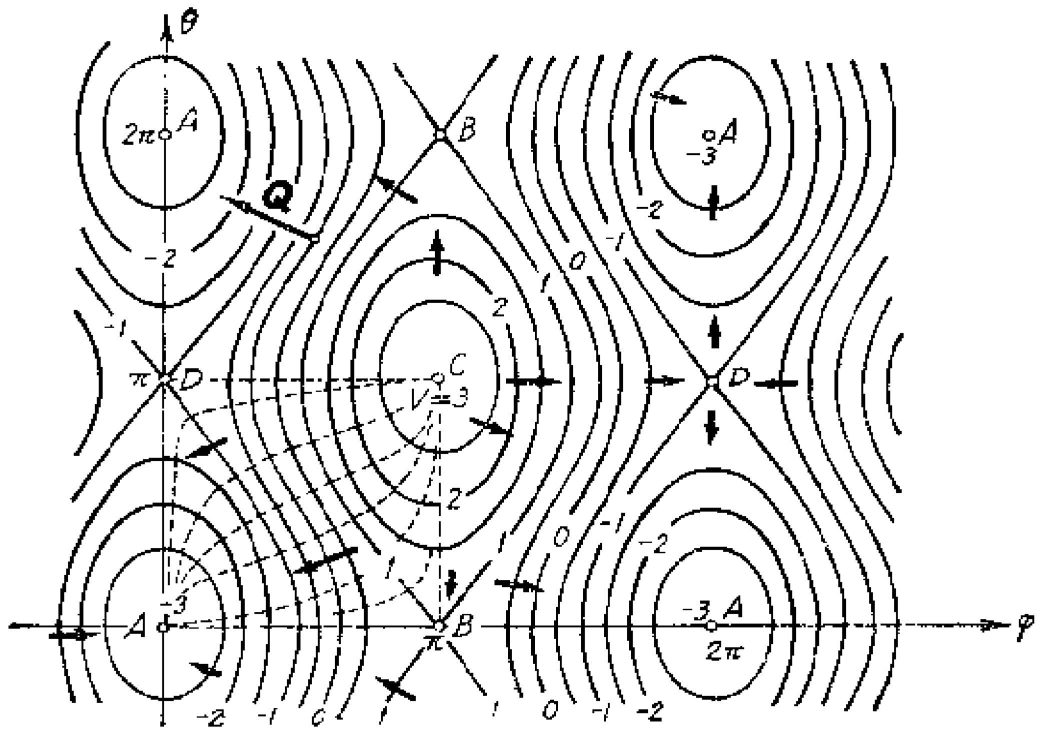


图7.11 双摆等势线

① 关于广义力的概念详见第十章。

如果取 $m_1=m_2=1$单位，$l_1=l_2=1$单位，则

$$V=-(2\cos\varphi+\cos\theta).$$

相应的等势曲线和广义力线如图7.11所示。图中实线表示等势线，虚线表示广义力线，箭头表示 $\boldsymbol{Q}$ 的方向。因为V是 φ 和 θ的周期函数，所以在 φ,θ 平面上的图案应该周期性地被重复。▌

7-3 动能

动能是物体机械能的另一种形式。在历史上，很早已认识到物体对外作功的能力与速度有关，后来又定量地知道与速度的平方有关。伽利略在观察落体时，作为实验结果已经得到速度和降落距离之间关系的公式，这在实质上已经开始触及动能这个量，但这还不是近代的动能概念。莱布尼兹(1688年)引进过“活力”一词，可以认为活力是动能的最早的名称。

动能也是物体作功能力的一种量度，在势能及其他形式的能量不变的情况下，如果外力对系统作功，使系统中的物体速度增加，那么系统就以动能的形式将外力所作的功转变为作功的能力储存起来，即系统的动能增加了。

由大量实验事实总结出质点的动能应该定义为①

$$T=\frac{1}{2}mv^2.$$

同时也只有应用这样的定义，才能够与牛顿定律相吻合，这在4-6中已经看到了。

动能是标量，它的量纲与功的量纲一样。

质点系的动能是各个质点的动能的总和。设各点的质量是 $m_1,m_2,\cdots,m_n$，速度是 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$，于是质点系的动能是

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2.$$

---

① 历史上曾用过 mv^2，后来才用 $\frac{1}{2}mv^2$。详见前面所引恩格斯《运动的量度——功》一文中最后四段。

对平动刚体，因各点的速度都相同，

$$v_1=v_2=\cdots=v_n=v,$$

所以动能可以写成

$$T=\frac{1}{2}(\sum m_i)v^2=\frac{1}{2}Mv^2.$$

可见平动刚体的动能和质点的动能公式是一样的。

刚体绕定轴转动时，刚体上任一点的速度为

$$v_i=\rho_i\omega,$$

ρ_i 是该点到转轴的垂直距离，ω是角速度的大小。因而动能是

$$T=\frac{1}{2}\sum[m_i(\rho_i\omega)^2]$$

$$=\frac{1}{2}(\sum m_i\rho_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2,$$

其中 J 是转动惯量。

如果我们把质量叫做平动惯量，那么就可以说：平动刚体的动能等于平动惯量乘线速度平方之半，而转动刚体的动能等于转动惯量乘角速度平方之半，形式上十分相似。

对于定点转动的刚体，其动能表达式将在第九章中讲述。

例7.6 半径为R的圆环在平面内绕O点转动，转角是φ。小珠m可在环上自由滑动（图7.12），小珠相对于环的转角为θ。求小珠的动能。

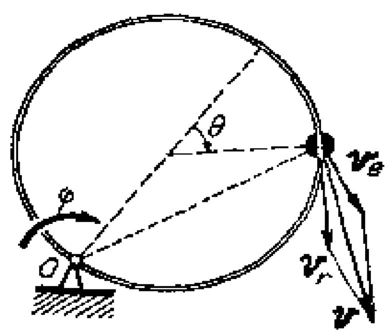


图7.12 小珠的动能

解 由图7.12，小珠的相对速度大小

$$v_r=R\dot{\theta},$$

牵连速度大小

$$v_e=2R\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\dot{\varphi}.$$

所以动能

$$T=\frac{1}{2}mv^2=mR^2\dot{\varphi}^2(1+\cos\theta)$$

$$+mR^2\dot{\theta}\dot{\varphi}(1+\cos\theta)+\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2. \blacksquare$$

质点系动能的计算，在许多情况中可以利用**寇尼格(König)定理**而加以简化。

设C是质点系的质心，取质心平动参考系，则质点的绝对速度为

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_i'+\boldsymbol{v}_C,$$

其中$\boldsymbol{v}_C$是质心的速度，$\boldsymbol{v}_i'$是质点的相对速度。于是有

$$v_i^2=v_i'^2+2\boldsymbol{v}_i'\cdot\boldsymbol{v}_C+v_C^2.$$

因此，质点系的动能可表示为

$$T=\frac{1}{2}\sum m_iv_i^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum m_iv_i'^2+\left(\sum m_i\boldsymbol{v}_i'\right)\cdot\boldsymbol{v}_C+\frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)v_C^2,$$

上式右端第一项是在质心平动参考系中的动能表达式；第三项可改写为$\frac{1}{2}Mv_C^2$；由于质心的性质，第二项等于零。故动能可写成

$$\boxed{T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}\sum m_iv_i'^2.} \tag{7.15}$$

这就是**寇尼格定理**：质点系的动能等于系统的质量全部集中在质心时质心的动能，再加上相对质心平动参考系的动能。

将这个定理应用于平面刚体，得

$$\boxed{T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2,} \tag{7.16}$$

上式右端第二项就是刚体绕质心轴的转动动能。



图7.13　动能＝？

例7.7　质量为M，半径为R的均质圆柱体，沿水平面作纯滚动（图7.13），角速度为ω。求圆柱体的动能。

解　因圆柱作纯滚动，所以质心C的速度$v_C=R\omega$. 由式(7.16)，圆柱的动能为

$$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2=\frac{3}{4}MR^2\omega^2. \quad \blacksquare$$

＊＊＊　刚体作平面运动时，如果A点是刚体上的点，J_A是刚体绕A点的转动惯量，问

$$T=\frac{1}{2}J_A\omega^2$$

是否成立？如果A点是速度瞬心，上式是否成立？　＊＊＊

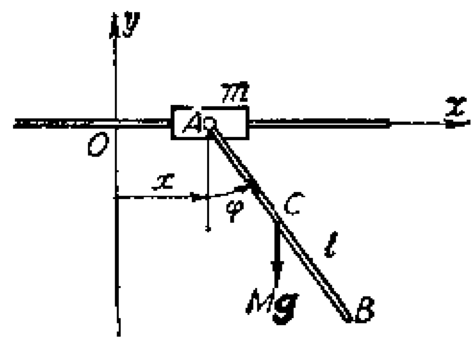


图7.14　求动能

例7.8　质量为m的滑块在水平轴x上滑动，它与质量为M，长为l的均质杆AB用铰链相连，杆可在竖直平面内自由转动（图7.14）。求系统的动能。

解　滑块的动能为$m\dot{x}^2/2$，杆的质心速度v_C满足下式：

$$v_C^2=\dot{x}^2+\frac{l^2\dot{\varphi}^2}{4}+\dot{x}\,l\,\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

杆对质心的转动惯量$J_C=Ml^2/12$，杆的转动角速度是$\dot{\varphi}$。所以整个系统的动能是

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\dot{\varphi}^2$$

$$=\frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2+\frac{1}{6}Ml^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}Ml\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

应该注意，杆的动能不能以A点为基点进行计算，即

$$T\neq\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}Mv_A^2+\frac{1}{2}J_A\dot{\varphi}^2.$$

尽管在运动学中基点是可以任意选的，现在却不行（为什么？）。▌

例7.9　曲线坐标系中质点动能的表达式

在一般曲线坐标系（见2-4）中有

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_1,q_2,q_3),$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3$$

$$=\dot{q}_1\boldsymbol{e}_1+\dot{q}_2\boldsymbol{e}_2+\dot{q}_3\boldsymbol{e}_3.$$

于是有

$$\boldsymbol{v}^2=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}g_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k,$$

其中

$$g_{jk}=\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_k}.$$

g_{jk}称为曲线坐标中的度规系数。因此动能可以表示为

$$T=\frac{m}{2}\sum\sum g_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k,$$

它是$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$，$\dot{q}_3$的一个二次型。对于正交曲线坐标系，有

$$g_{jk}=\begin{cases}h_j^2, & j=k,\\ 0, & j\neq k.\end{cases}$$

其中h_j是拉梅系数。因此动能为

$$T=\frac{m}{2}(h_1^2\dot{q}_1^2+h_2^2\dot{q}_2^2+h_3^2\dot{q}_3^2).$$

球坐标、柱坐标以及直角坐标都是正交曲线坐标的特例。质

点的动能在这些坐标系中的表达式分别为

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta);$$

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2);$$

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2).$$

例7.10 受约束质点系动能的表达式

设质点系由 n 个质点组成，由于有约束，质点系具有 $s(\leqslant 3n)$ 个自由度。假定用 s 个独立参数可以完全描述质点系的位形，这 s 个独立参数为 $(q_1,q_2,\cdots,q_s)$，它们是时间 t 的待定函数。任意质点的向径可表示为

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_s;t),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

当 $n=1$，$s=3$，而且 $\boldsymbol{r}_i$ 中不显含时间 t 时，就是例7.9中已经讨论过的情况。

每一质点的速度可表示为

$$\boldsymbol{v}_i=\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j,$$

因此有

$$\begin{aligned}v_i^2&=\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i\\&=\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}+2\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k.\end{aligned}$$

于是质点系的动能为

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_iv_i^2\\&=\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right]\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\left[\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right]\dot{q}_j$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\left[\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right]\dot{q}_j\dot{q}_k.$$

将上式三个方括号中的和分别记作 a，b_j 和 c_{jk}，它们都是 q_1，$q_2,\cdots,q_s$ 和 t 的函数，于是动能可写成

$$T=a+\sum_{j=1}^{s}b_j\dot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}c_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k.$$

把上式右端三项分别记作 T_0,T_1 和 T_2，则有

$$T=T_0+T_1+T_2.$$

这就是说，在一般的情况下，动能由三部分组成，它们对 $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_s$来说都是齐次式，次数分别是零次、一次和二次。

当 $\boldsymbol{r}_i$ 中不显含 t 时，因为 $\partial\boldsymbol{r}_i/\partial t=0$，故 $T_0=T_1=0,T=T_2$。此时动能是 $\dot{q}_i$的二次齐次式。▌

7-4 动能变化定理

在质点系的动量和动量矩定理中，我们已经看到，由于内力的主向量和内力的主矩总是零，因此内力不影响质点系动量和动量矩的变化。然而，内力的功却不一定是零，因此它对于动能的变化是要起作用的。

设质点系中第 i 个质点的质量为 m_i，速度为 $\boldsymbol{v}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i(i=1,2,\cdots,n)$，它受到的外力是 $\boldsymbol{F}_i^{外}$，内力是 $\sum\limits_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij}$。根据牛顿第二定律，有

$$d\left(\frac{1}{2}m_iv_i^2\right)=\frac{1}{2}m_id(\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i)=\left(m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\right)\cdot d\boldsymbol{r}_i$$

$$=\boldsymbol{F}_i^{外}\cdot d\boldsymbol{r}_i+\left(\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij}\right)\cdot d\boldsymbol{r}_i,$$

$$i=1,2,\cdots,n.$$

将上式由 1 至 n 求和，等号左边正好是质点系的动能 $T=\sum\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right)$ 的微分 dT。由此得出

$$dT=\sum F_i^{外}\cdot dr_i+\sum_{j\neq i}\sum F_{ij}\cdot dr_i,$$

或写成

$$dT=\delta w^{外}+\delta w^{内}. \tag{7.17}$$

上式说明，系统动能的微分等于外力元功和内力元功之和。这就是**动能变化定理**。

将式(7.17)在系统的两种位形状态 1 和 2 之间积分，得

$$\boxed{T_2-T_1=w_{12}^{外}+w_{12}^{内}.} \tag{7.18}$$

上式说明，当系统由状态 1 转移到状态 2 时，动能的改变等于外力和内力作功之和，这是动能变化定理的另一种表达形式。

一般地说，内力的功并不为零，但在某些特殊情况下，内力的功为零(比如刚体)，则式(7.17)和(7.18)成为

$$dT=\delta w^{外},$$

和

$$T_2-T_1=w_{12}^{外}. \tag{7.19}$$

必须注意，不能在任何情况下都应用式(7.19)。

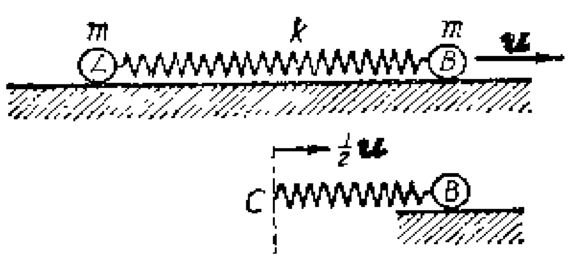


图7.15 求动能

例7.11 两个相同的小球 A 和 B 用一弹簧相连，放在光滑水平面上(图7.15)，弹簧系数为 k，小球质量为 m。设开始时弹簧为原长，且 A 球速度为零，B 球以初速 u 向右运动。求系统动能的变化规律以及弹簧力所作的功。

解 根据质心运动定理，系统的质心 C 作等速直线运动，速

度为 $u/2$，所以质心参考系是惯性系。下面在质心系中考虑问题。因 C 点不动，故小球 A 和 B 的运动相当于一半长的弹簧带动的简谐振动。弹簧长度减少一半，弹簧系数为 $2k$，因此 A 球和 B 球的振动频率 $\omega=\sqrt{2k/m}$，它们的初速分别是 $-u/2$ 和 $u/2$，所以它们的速度变化规律是

$$v_{Ar}=-\frac{u}{2}\cos\omega t,\quad v_{Br}=\frac{u}{2}\cos\omega t.$$

即 A 和 B 在质心系中的速度总是大小相等、方向相反，且作周期性的变化。所以在质心系中的动能为

$$T_r=\frac{m}{2}(v_{Ar}^2+v_{Br}^2)=\frac{1}{4}mu^2\cos^2\omega t.$$

利用寇尼格定理，系统相对固定参考系的动能为

$$T=\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{u}{2}\right)^2+T_r=\frac{1}{4}mu^2(1+\cos^2\omega t).$$

可见系统的动能作周期性变化(图7.16)。当 $t=0$ 时，$T=mu^2/2$，动能最大。因为外力不作功，根据式(7.18)，动能的变化完全由内力作功所引起，也就是说，内力(弹簧力)所作的功是

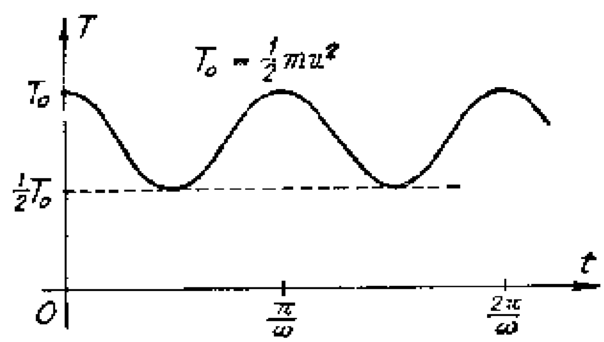


图7.16 $T(t)$ 曲线

$$w^{内}=T-T_0=-\frac{1}{4}mu^2\sin^2\omega t\leqslant 0.$$ ▌

* * * 在上例中，将弹簧改为不可伸长的绳子，动能会不会有变化？此时内力的功应该作怎样的理解？ * * *

例7.12 人在水平路面上骑自行车，由静到动，设起动过程中轮子与地面无相对滑动。这个系统的动能是增加的，问什么原

因使动能增加了？

解 先分析外力。重力不作功，地面对前后轮的法向力不作功，前后轮所受的摩擦力也不作功（因为无滑动），空气阻力作负功，总之外力的总功是负的。根据动能变化定理，内力必须作正功，这个功是人所作的。因此人对车的内力使系统的动能增加。

同理，人走路时也是内力作正功。地面对鞋底作用有摩擦力，方向向前，它只能使人体向前的动量增加，但是它的功等于零，所以它并不能增加人体的动能。▎

例7.13 分析两个小球互相对心碰撞时系统动能的变化。

解 设碰撞前两球的速度分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$，因为是对心碰撞，$\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 沿同一直线。再设两球的碰撞恢复系数为 e。由此可以算得系统在碰撞过程中动能的损失为

$$\Delta T = T_{前} - T_{后} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2)(v_1 - v_2)^2.$$

可见只有在完全弹性碰撞时才有 $\Delta T = 0$，在一般情况中 $\Delta T > 0$，即 $T_{后} < T_{前}$。这说明内力作负功(外力是常规力，在碰撞期间所作之功可忽略不计）。从碰撞过程的两个阶段分析，第一阶段，两球被挤压而变形，两球心间的距离减小，内力作负功；第二阶段是恢复阶段，两球心间的距离增加，内力作正功。对于完全弹性碰撞($e=1$)，两者之和刚好为零，因而碰撞前后系统总动能没有变化。在完全非弹性碰撞($e=0$)的情况中，没有第二阶段，内力作负功。在一般情况中，有变形也有恢复，但是恢复不到原来的状态，所以内力的总功还是负的。内力作负功的物理意义是，有一些能量转变为小球的形变势能或其他形式的能量，比如热能等。▎

例7.14 “悠悠”(yo-yo 菲列宾语)是一种玩具，它是一木制圆柱体，中间刻有凹槽，凹槽内有一轴，上面绕着绳子(图7.17)。设它对中心轴的迴转半径为 k，轴的半径为 R。悠悠从静止由

发，下落一距离 y，求其中心的速度大小 v 和加速度大小 a。

解 取悠悠和绳一起为所考虑的系统。绳子是不可伸长的，因此绳子内力的功为零①。悠悠本身被视为刚体，因此内力作功也为零。外力中只有重力作功，其值为 mgy。根据式(7.19)可得

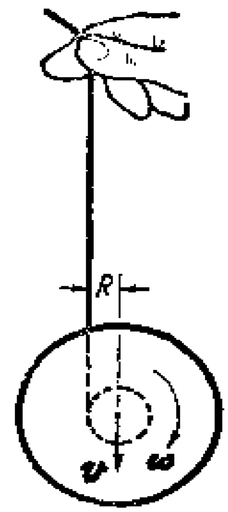


图 7.17 "悠悠"

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}(mk^2)\omega^2=mgy.$$

因为角速度 $\omega=v/R$，代入上式，解得

$$v^2=\frac{2R^2}{R^2+k^2}gy.$$

开方后即得所求的速度大小。上式对时间求导数，得

$$v\dot{v}=\frac{R^2}{R^2+k^2}g\dot{y}.$$

因为 $\dot{y}=v$, $\dot{v}=a$，代入便得

$$a=\frac{R^2}{R^2+k^2}\cdot g=\frac{1}{1+k^2/R^2}\cdot g.$$

如果 k/R 很大，则 a/g 很小。例如设 $k=7R$，则加速度 a 只有重力加速度的五十分之一，因此"悠悠"可以悠然下落，好象重力加速度很小状态下的自由落体一样。▌

在寇尼格定理中，即式(7.15)中，质点系的动能被分解为质心部分的动能 $Mv_c^2/2$ 和相对质心部分的动能 $(\sum m_iv_i'^2)/2$。现在讨论质心部分的动能的变化规律。对它求微分并利用关系式 $d\boldsymbol{r}_c=\boldsymbol{v}_cdt$，得

$$d\left(\frac{1}{2}Mv_c^2\right)=d\left(\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_c\cdot\boldsymbol{v}_c\right)=d(M\boldsymbol{v}_c)\cdot\boldsymbol{v}_c$$

① 在受到突然冲击时，绳子内力的功可能不为零，本题不涉及这一过程。

$$= \frac{d}{dt}(M\boldsymbol{v}_c) \cdot d\boldsymbol{r}_c.$$

根据质心运动定理有

$$\frac{d}{dt}(M\boldsymbol{v}_c) = \sum \boldsymbol{F}_i^{外}.$$

代入上式，得

$$d\left(\frac{1}{2}Mv_c^2\right) = \sum \left(\boldsymbol{F}_i^{外} \cdot d\boldsymbol{r}_c\right). \qquad (7.20)$$

由此可见，单单考虑质心部分动能的变化时，内力在关系式中不出现，好象只有外力才作功似的。但是必须注意的是，按照功的定义，$\boldsymbol{F}_i^{外} \cdot d\boldsymbol{r}_c$ 并不是外力 $\boldsymbol{F}_i^{外}$ 的元功，因为这个力是作用在第 i 个质点上的，而不是作用在系统的质心上的。对于式(7.20)，我们可以作这样的解释，质点系质心动能的变化，等于假想把所有外力都平移到质心 C 后所作的功，它形式上与内力无关。

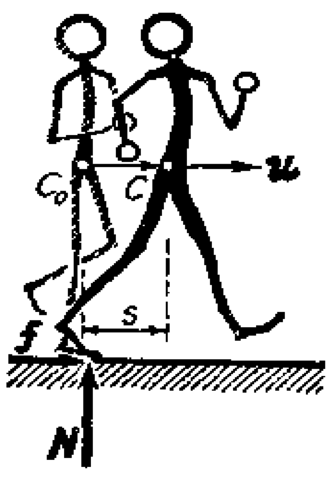


图7.18 $\frac{1}{2}mu^2 = fs$，f 作功吗？

例7.15 人起步走路，前脚悬空，后脚着地(图7.18)。设质心速度由零增为 u，位置由 C_0 移到 C，$\overrightarrow{C_0C}$ 的水平投影是 s。根据式(7.20)，有

$$\frac{1}{2}mu^2 - 0 = fs,$$

其中 f 是摩擦力的平均值。fs 并不是摩擦力真正作的功，因为摩擦力作用在鞋底上，作功为零。同时，摩擦力并不作用在人的质心上，但从计算质心动能变化这个角度来说，可以把它当作作用在质心上那样处理。▌

下面考虑相对质心平动参考系的动能变化定理。质心平动参考系一般说来不是惯性系，但是可以证明，动能变化公式在形式上却和惯性系中一样。设 $\boldsymbol{r}_i'$ 代表质心平动参考系中质点 i 的向径，

即有

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i'+\boldsymbol{r}_c.$$

在惯性系中动能变化定理是成立的，即式(7.17)成立：

$$dT=\sum \boldsymbol{F}_i^{外}\cdot d\boldsymbol{r}_i+\sum\sum \boldsymbol{F}_{ij}\cdot d\boldsymbol{r}_i.$$

寇尼格定理是

$$T=\frac{1}{2}Mv_c^2+\frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2.$$

外力和内力的元功分别可写成

$$\sum \boldsymbol{F}_i^{外}\cdot d\boldsymbol{r}_i=\sum \boldsymbol{F}_i^{外}\cdot d\boldsymbol{r}_c+\sum \boldsymbol{F}_i^{外}\cdot d\boldsymbol{r}_i',$$

$$\sum\sum \boldsymbol{F}_{ij}\cdot d\boldsymbol{r}_i=\left(\sum\sum \boldsymbol{F}_{ij}\right)\cdot d\boldsymbol{r}_c+\sum\sum \boldsymbol{F}_{ij}\cdot d\boldsymbol{r}_i'.$$

将以上三个关系式代入式(7.17)中，并注意到式(7.20)和内力主向量等于零，即$\sum\sum \boldsymbol{F}_{ij}=0$，最后可得

$$\boxed{dT'=\sum \boldsymbol{F}_i^{外}\cdot d\boldsymbol{r}_i'+\sum\sum \boldsymbol{F}_{ij}\cdot d\boldsymbol{r}_i',}$$

即在质心平动参考系中，动能T'的微分等于外力和内力元功之和。因此在这个特殊的非惯性系中动能与功的关系在形式上和在惯性系中一样，对于一般的非惯性系却没有这样的结论。

最后，我们比较在两个惯性参考系(分别称为"新"与"老")中动能表达式之间的关系。设新惯性系对老惯性系的速度是常向量$\boldsymbol{V}$，一个质点在新老惯性系中的速度分别是$\boldsymbol{v}'$与$\boldsymbol{v}$，有关系

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V}.$$

所以，在新老两个惯性系中动能的表达式有以下的关系

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sum mv^2\\&=\frac{1}{2}\sum mv'^2+\left(\sum m\boldsymbol{v}'\right)\cdot\boldsymbol{V}+\frac{1}{2}\sum mV^2\end{aligned}$$

$$= T' + \left(\sum mv'\right)\cdot V + \text{常量}。$$

虽然动能的值变了，但是动能变化定理还是成立的。考虑它们的微分，

$$dT = dT' + \frac{d}{dt}\left(\sum mv'\right)\cdot Vdt。$$

再看在新老两个参考系中功的关系。因为位移 $d\boldsymbol{r}$ 与 $d\boldsymbol{r}'$ 之间有关系式

$$d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}dt,$$

因而同一个力（不论是内力还是外力）$\boldsymbol{F}_i$ 的元功 δw_i 和 $\delta w_i'$ 之间的关系是

$$\delta w_i = \boldsymbol{F}_i\cdot d\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{V}dt = \delta w_i' + \boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{V}dt。$$

对于所有力的总功 $\delta W = \sum \delta w_i$ 和 $\delta W' = \sum \delta w_i'$ 之间有关系式

$$\delta W = \delta W' + \left(\sum \boldsymbol{F}_i\right)\cdot\boldsymbol{V}dt。$$

因为带“′”的参考系也是惯性系，所以在其中牛顿第二定律是成立的，即有

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m\boldsymbol{v}'\right) = \sum \boldsymbol{F},$$

于是就可由 $dT = \delta W$ 推得 $dT' = \delta W'$。这就是说，在不同的惯性系中，动能变化定理在形式上是完全相同的。在新老惯性系中取直角坐标(x,y,z)和(x',y',z')，使其原点 O 在时刻 $t=0$ 时相重合，且两组坐标轴平行，则有

$$\begin{cases} x = x' + V_x t, \\ y = y' + V_y t, \\ z = z' + V_z t。\end{cases}$$

这组变换公式就是伽利略变换。以上所讨论的由 $dT = \delta W$ 可以推出 $dT' = \delta W'$ 说明，动能变化定理对于伽利略变换具有共变性

或协变性。

7-5　能量守恒定律

能量守恒定律是宇宙中普遍规律之一，一般意义下的动量守恒和动量矩守恒是空间均匀性和空间各向同性的结果，而能量守恒是时间均匀性的结果①。物理系统的能量是各种形式能量的总和，这些形式包括动能、势能、电能、磁能、热能等等。因此单在力学的范围内不可能全面地将一般的能量守恒定律论述清楚。在力学中只讨论机械能守恒，机械能包括动能和势能两种。

系统的机械能是一种作功的能力，不管是动能或势能都是用功来量度的。在一个系统中，动能和势能之间可能转换，系统外和系统内的能量也可能进行交换，转换时都以功作为量度，或者说以作功的形式加以实现。

上一节的动能变化定理说明，质点系动能的增量等于内力和外力所作的总功，即

$$T-T_0=W^{内}+W^{外}.$$

现在我们把所有的力，不管是内力还是外力，按保守力和非保守力分成两类。于是，动能的增量也可以写成

$$T-T_0=W^{保守}+W^{非保守}.$$

根据7-2的讨论，保守力所作的功为 V_0-V，代入上式可得

$$T+V-(T_0+V_0)=W^{非保守}, \qquad (7.21)$$

其中 V 和 V_0 是系统在两个位形时的势能。

将物体的动能和势能的总和，即物体的机械能记作 E，则有

$$E=T+V.$$

于是式(7.21)可以写成

---

① 详见10.4。

$$E - E_0 = W^{\text{非保守}}. \tag{7.22}$$

此式说明，物体系机械能的改变量等于所有非保守力作的功。

如果除了保守力作用外，沒有其他力作用，那么式(7.22)将成为 $E = E_0$，或

$$T + V = E_0. \tag{7.23}$$

这就是说，整个系统的能量沒有变化，即机械能守恒。有一些力，虽然不是保守力，但是它们不作功，或者它们作功之和为零。比如7-1的(四)中所说的那些不作功的约束力，它们虽然存在，但机械能仍然是守恒的。总之机械能守恒的条件是沒有非保守力作用，或者除了保守力外仅有不作功的力作用。

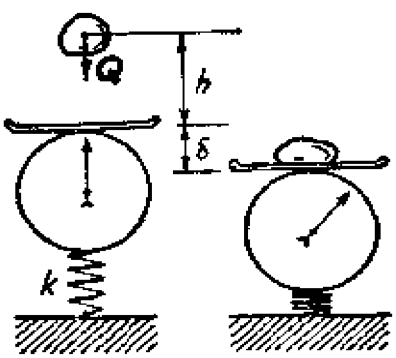


图7.19 面团有多重?

例7.16 台秤可以认为由重为 P 的盘子和刚性系数为 k 的弹簧组成(图7.19)。现有一个面团，重为 Q，无初速地自高 h 处落到台秤盘上。问台秤的最大读数是多少?

解 设秤盘下降的最大距离是 δ，则台秤的最大读数就是 $k\delta$。面团和秤盘的碰撞过程可以认为是完全非弹性的，在碰撞过程中有动能损失。

将整个过程分成三个阶段。第一阶段，面团碰撞秤盘以前，机械能守恒，于是可算得刚开始碰撞前的面团速度是 $u = \sqrt{2gh}$。

第二阶段是碰撞过程，有动能损失，但动量守恒，于是面团和秤盘在碰撞过程结束时的速度为

$$v = \frac{Q}{P+Q}u = \frac{Q}{P+Q}\sqrt{2gh}.$$

第三阶段是压缩弹簧，面团和秤盘一起下落 δ 距离，这一阶段机械能守恒。动能由$(P+Q)v^2/2g$变为零，重力势能减少$(P+Q)\delta$，弹性势能的增加量为

$$\frac{k}{2}\left[\left(\frac{P}{k}+\delta\right)^2-\left(\frac{P}{k}\right)^2\right]=P\delta+\frac{1}{2}k\delta^2.$$

由机械能守恒定律可得

$$-\frac{P+Q}{2g}v^2-(P+Q)\delta+P\delta+\frac{1}{2}k\delta^2=0.$$

将 v^2 的表达式代入，可解出(取正根)

$$\delta=\frac{Q}{k}+\sqrt{\left(\frac{Q}{k}\right)^2+\frac{2hQ^2}{k(P+Q)}}.$$

所以秤上的最大读数是

$$k\delta=Q\left(1+\sqrt{1+2kh/(P+Q)}\right).$$

如果 $h=0$，则最大读数是真实重量的两倍。▌

7-6 杂题十二例

本章所讲的能量定理，在应用时往往要和以前各章的定理(牛顿定律、动量及动量矩定理等)结合起来。下面是十二个不同类型的例题。同一个题目的解法并不是唯一的，我们只选一种作简要说明。多方面的仔细推敲工作留给读者自己去进行。

例7.17 复摆支点为 O，质心为 C，$OC=l$，总质量为 m，相对质心的迴转半径为 k(图7.20)。求支点对复摆的约束力 $\boldsymbol{R}$。

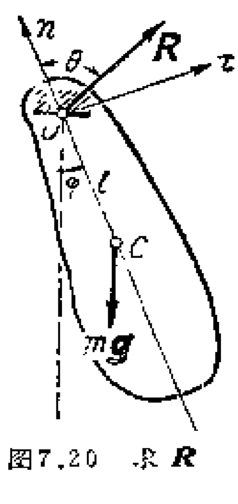


图7.20 求 $\boldsymbol{R}$

解 设摆角为 φ，最大摆角为 α。由机械能守恒定律，得

$$\frac{1}{2}m(k^2+l^2)\dot{\varphi}^2=mgl(\cos\varphi-\cos\alpha),$$

解得

$$\dot{\varphi}^2=\frac{2gl}{(k^2+l^2)}(\cos\varphi-\cos\alpha).$$

上式对时间求一次导数，可得

$$\ddot{\varphi}=-\frac{gl}{(k^2+l^2)}\sin\varphi.$$

质心C的运动微分方程为

$$\begin{cases} ml\ddot{\varphi}=-mg\sin\varphi+R_\tau, \\ ml\dot{\varphi}^2=-mg\cos\varphi+R_n. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} R_\tau=\dfrac{k^2}{k^2+l^2}mg\sin\varphi, \\ \\ R_n=mg\left(\dfrac{3l^2+k^2}{k^2+l^2}\cos\varphi-\dfrac{2l^2}{k^2+l^2}\cos\alpha\right). \end{cases}$$

所以约束力$\boldsymbol{R}$的大小为

$$R=\sqrt{R_\tau^2+R_n^2},$$

$\boldsymbol{R}$与$\boldsymbol{n}$的夹角为

$$\theta=\mathrm{arc\,tg}(R_\tau/R_n).$$

考虑两个特殊情况。设摆是均质杆，支点是杆的一端，则

$$R_\tau=\frac{1}{4}mg\sin\varphi,$$

$$R_n=mg\left(\frac{5}{2}\cos\varphi-\frac{3}{2}\cos\alpha\right).$$

设摆是单摆，则

$$R_\tau=0,\quad R_n=mg(3\cos\varphi-2\cos\alpha).$$ ▌

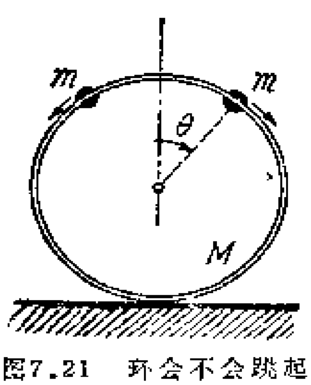


图7.21　环会不会跳起来？

例7.18　质量为m的两个相同的小珠，串在光滑圆环上，无初速地自最高处滑下，圆环竖直地立在地面上(图7.21)。圆环的质量M和小珠质量m有什么关系时，圆环才可能从地面跳起。

解　设圆环半径为R，小珠滑下的位置用θ角描述。对小珠应用能量守恒定律，得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)。$$

上式对 t 求导数，得

$$\ddot{\theta} = (g\sin\theta)/R。$$

因此，小珠加速度的向下分量为

$$a = R\dot{\theta}^2\cos\theta + R\ddot{\theta}\sin\theta = g(1+2\cos\theta-3\cos^2\theta)。$$

以圆环加上两个小珠作为系统，应用质心运动定理，并利用关系式

$$\left(\sum m_i\right)\boldsymbol{a}_c = \sum m_i \boldsymbol{a}_i,$$

得

$$M\times 0 + 2mg(1+2\cos\theta-3\cos^2\theta) = -N + 2mg + Mg,$$

其中 N 是地面对圆环的向上反力的大小，解得

$$N = Mg + 2mg(3\cos^2\theta - 2\cos\theta)。$$

$N=0$ 时的 θ 值就是跳起来的临界值①，得方程

$$3\cos^2\theta - 2\cos\theta + M/2m = 0。$$

要求此方程有 $\cos\theta$ 的实根，因此要求满足条件

$$\frac{M}{m} < \frac{2}{3}。$$

这就是圆环可能跳离地面的条件。当满足上述条件时，可以解得圆环开始上跳时的 θ 值(根号前取正号)为

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{3M}{2m}}\right)。$$

当 θ 大于这个数值以后，圆环如何运动？请读者自己进行分析。还请考虑为什么根号前取正号而不取负号？ ▌

---

① 如取圆环为对象，列出平衡条件，也可以得出 N 的同样结果。读者不妨画出圆环的受力图，可见小珠对圆环的作用力有向上的分量，这个分量如足够大就会"提起"圆环。要求 $N>0$ 才能使圆环保持平衡，所以 $N=0$ 是临界情况。

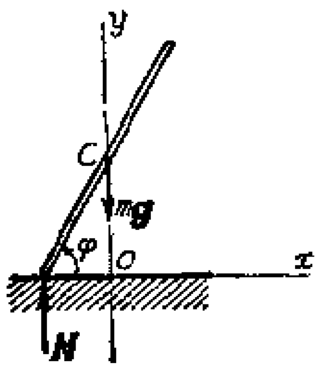


图7.22　$N_{min}=?$

例7.19　均质杆直立在光滑水平面上，受到微小的干扰后在竖直平面内倒下(图7.22)。证明杆子在倒下的过程中，其下端受到的反力的最小值是杆重的0.165倍。

解　杆在倒下过程中，水平动量守恒，故其质心沿竖直线Oy运动。设杆与水平面夹角为φ，杆长为$2l$，质量为m，则质心速度为

$$\dot{y}=l\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

由机械能守恒，得

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\varphi}^2+mgl\sin\varphi=mgl,$$

解得

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2=\frac{3g}{l}\cdot\frac{1-\sin\varphi}{4-3\sin^2\varphi}.$$

由此求出

$$\ddot{\varphi}=\frac{3g}{l}\cdot\frac{(-4+6\sin\varphi-3\sin^2\varphi)}{(4-3\sin^2\varphi)^2}\cdot\cos\varphi.$$

应用质心动量矩定理，得

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}=-Nl\cos\varphi.$$

由上两式，得

$$N=mg\cdot\frac{4-6\sin\varphi+3\sin^2\varphi}{(4-3\sin^2\varphi)^2}.$$

令　$\lambda=\sin\varphi$，则

$$N=mg\cdot\frac{4-6\lambda+3\lambda^2}{(4-3\lambda^2)^2}.$$

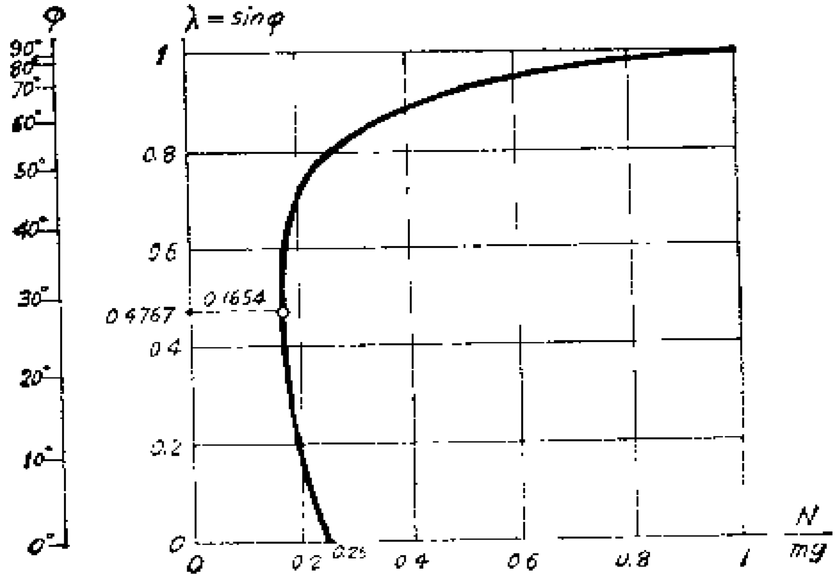


图7.23 不同位置时 N 的值

N随λ的变化关系如图7.23所示。λ是质心的相对高度，$\lambda=1$代表直立位置，$\lambda=0$代表完全倒下。

为了求N的极值，令$dN/d\lambda=0$。问题化为求解下列方程中小于1的实根

$$3\lambda^3-9\lambda^2+12\lambda-4=0.$$

解出当$\lambda=0.4767$时(这时$\varphi=28.47°$)N达极小值，代入N的表达式，得

$$N_{min}=0.1654mg,$$

即反力始终大于杆重的0.165倍(约六分之一)。还可以看出，当杆躺平之前的瞬间($\varphi=0$)，反力是杆重的四分之一。▮

例7.20 均质杆AB原为水平，其三分之一放在桌子上，悬空端B用手托着(图7.24)。突然将手放开，杆绕桌边转过一个角度θ后开始有滑动。证明桌边与杆之间的摩擦系数μ满足关系

$$\mu=2\text{tg}\theta.$$

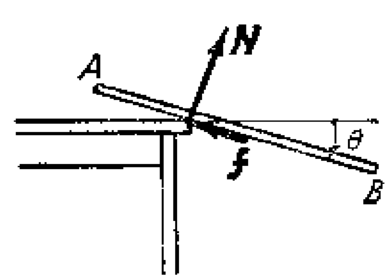


图7.24 杆何时开始滑动?

解　在开始滑动以前，杆可当作复摆处理，桌子对杆的作用力就是支座反力。设杆与水平夹角为 θ，$\boldsymbol{f}$ 为沿杆方向的反力，即摩擦力，$\boldsymbol{N}$ 为法向力。与例7.17类似地可求出

$$f=\frac{3}{2}mg\sin\theta,\qquad N=\frac{3}{4}mg\cos\theta.$$

刚开始滑动的条件是 $f=\mu N$，即

$$\frac{3}{2}mg\sin\theta=\mu\frac{3}{4}mg\cos\theta,$$

由此解得

$$\mu=2\mathrm{tg}\theta.$$ ▮

例7.21　圆环质量为 M，放在光滑水平面上。有一质量为 m 的小虫在圆环上爬行(图7.25)。求证，小虫在圆环上相对地爬行一周时，圆环的自转角度不超过180°。设初始时系统静止。

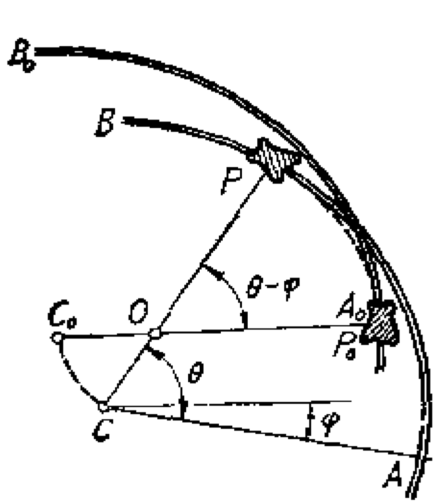


图7.25　小虫爬环

解　设 θ 是小虫在环上的相对转角，φ 是环在平面上的自转角度(圆环某一半径 CA 与其自身原来位置 C_0A_0 之间的夹角)，小虫开始爬行时，$\theta=0$ 和 $\varphi=0$。

设环和小虫这个系统的质心为 O 点，因为动量守恒，所以 O 点不动。另外，系统对 O 点的动量矩守恒，并等于零。

设圆环半径为 R，P 是小虫的位置，则

$$\overline{OP}=\frac{MR}{m+M},\qquad \overline{OC}=\frac{mR}{m+M}.$$

小虫 P 和圆环中心 C 的连线绕固定点 O 的绝对转角是 $(\theta-\varphi)$。

小虫对 O 点的动量矩是

$$m\left(\frac{M}{m+M}\right)^2 R^2(\dot{\theta}-\dot{\varphi}),$$

圆环相对其自身的质心 C 点的动量矩为

$$-MR^2\dot{\varphi},$$

圆环质心对 O 点的动量矩为

$$M\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 R^2(\dot{\theta}-\dot{\varphi}).$$

三者之和应恒等于零，得

$$\frac{mM}{m+M}R^2(\dot{\theta}-\dot{\varphi})-MR^2\dot{\varphi}=0.$$

利用初条件 $\theta=0$，$\varphi=0$，积分后得

$$\frac{mM}{m+M}R^2(\theta-\varphi)-MR^2\varphi=0,$$

解出

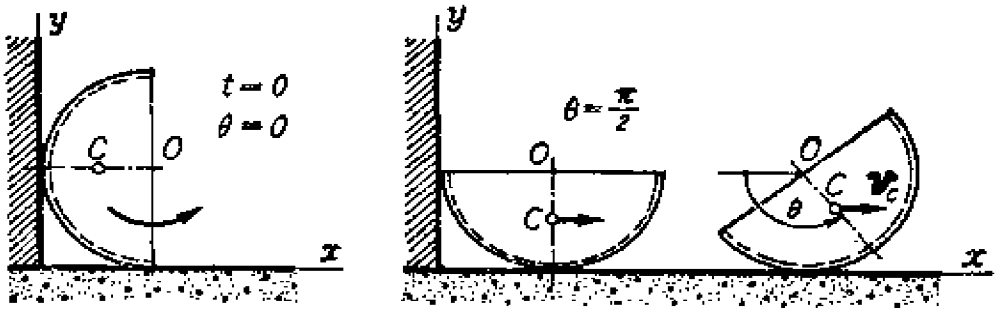
$$\varphi=\frac{m/M}{1+2m/M}\theta.$$

当小虫爬过一周，即 $\theta=2\pi$ 时，有

$$\varphi=\frac{m\cdot M}{1+2m/M}\cdot 2\pi.$$

当小虫与圆环的质量比 $m/M\to 0$ 时，$\varphi\to 0$，即轻虫爬重环，圆环基本不转。当 $m/M\to\infty$ 时，$\varphi\to\pi$，即重虫爬轻环，圆环自转角接近180°。对于任何质量比 m/M，圆环自转角 φ 在0°和180°之间。▌

例7.22 放在光滑水平面上的半径为 R 的半个均质球壳，原先靠在光滑墙面上，底平面竖直(图7.26(a))，由于重力作用而无初速地滑下。求证在脱离墙以后的运动中，质心的水平速度是 $\sqrt{3gR/8}$，且底面与水平面的夹角不超过 $\arccos(3/8)$。



(a) 靠墙的运动　　　(b) 脱离墙面后的运动

图7.26 将运动分成两个阶段

解 半球壳质心C离底面的距离为$OC=R/2$，半球壳对过O点的底面直径的转动惯量为$J_O=2mR^2/3$。根据平行移轴定理，可算得对于过质心C的水平轴的转动惯量为$J_C=5mR^2/12$。

第一阶段，在靠墙倒下的过程中，半球壳绕过O的轴作定轴转动，设OC的转角是θ，开始时$\theta=0$，$\dot{\theta}=0$。则根据能量守恒得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}mR^2\right)\dot{\theta}^2-mg\cdot\frac{R}{2}\sin\theta=0,$$

解得

$$\dot{\theta}^2=\frac{3}{2}\frac{g}{R}\sin\theta.$$

质心C的速度是

$$\dot{x}_C=\frac{R}{2}\dot{\theta}\sin\theta,\quad \dot{y}_C=-\frac{R}{2}\dot{\theta}\cos\theta.$$

墙对球壳的水平反力为

$$N=m\ddot{x}_C=m\frac{R}{2}(\dot{\theta}^2\cos\theta+\ddot{\theta}\sin\theta)=\frac{9}{8}mg\sin\theta\cos\theta.$$

在$0<\theta<\pi/2$之间，$N>0$，所以半球壳不会脱离墙面。

当$\theta=\pi/2$时，半球壳开始脱离墙面。此时，

$$\dot{\theta}=\sqrt{3g/2R},$$

质心速度为

$$\dot{x}_C=\sqrt{3gR/8},\quad \dot{y}_C=0.$$

第二阶段，球壳离开墙以后（图7.26(b)），由于水平动量守恒，故有 $\dot{x}_C$＝常量。

在以水平速度为 $\dot{x}_C$ 的平动参考系中（它也是惯性系），质心速度为

$$\dot{x}'_C=0,\quad \dot{y}'_C=-(R/2)\dot{\theta}\cos\theta.$$

由机械能守恒，得

$$\frac{1}{2}m\left(-\frac{R}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{12}mR^2\right)\dot{\theta}^2-mg\cdot\frac{R}{2}\sin\theta=E.$$

利用初条件，当 $\theta=\pi/2$ 时，$\dot{\theta}^2=3g/2R$，可以确定常数

$$E=-3mgR/16,$$

从而解得

$$\dot{\theta}^2=\frac{3g}{2R}\cdot\frac{8\sin\theta-3}{3\cos^2\theta+5}.$$

由此得出必须有条件 $\sin\theta\geqslant 3/8$。因为 θ 是 OC 与水平面的夹角，而 OC 与半球壳底面是垂直的，所以底面与水平面的夹角不会超过 $\arccos(3/8)$。半球壳向前滑动的同时约在 $\pm68°$ 范围内晃动。▌

例7.23 半径为 R 的均质圆柱体在水平面上作纯滚动，其中心速度为 u，向前滚动时它遇到一个高为 h 的台阶(图7.27(a))而发生完全非弹性碰撞，柱和台阶前缘之间的摩擦系数足够大。问 u 为何值时圆柱能不脱离 A 点地滚上台阶继续前进？又问台阶高度 h 应有什么限制？



图7.27 圆柱能滚上台阶吗？

解 圆柱体与台阶碰撞的前后，圆柱体对过A点的轴的动量矩守恒。碰撞后圆柱绕A轴作定轴转动，设碰撞后，即圆柱上翻过程的初始角速度为ω，又设圆柱质量为m，则有

$$mu(R-h)+\frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{u}{R}=\frac{3}{2}mR^2\omega.$$

解得

$$\omega=\left(1-\frac{2h}{3R}\right)\cdot\frac{u}{R}. \qquad (1)$$

在圆柱上翻过程中（图7.27(b)），机械能守恒。取$\theta=0$为圆柱重力势能为零的状态，圆柱的角速度为$\dot{\theta}$，则有

$$\frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2+mgR\sin\theta$$

$$=\frac{3}{4}mR^2\omega^2+mg(R-h). \qquad (2)$$

圆柱体能滚上台阶的条件是：当$\theta=\pi/2$时，$\dot{\theta}>0$。将式(1)代入式(2)，得

$$\frac{4}{3}gh<\left(1-\frac{2h}{3R}\right)^2u^2. \qquad (3)$$

另一方面，圆柱不脱离A点的条件是正压力$N>0$。由圆柱体质心的运动方程

$$mR\dot{\theta}^2=mg\sin\theta-N,$$

得

$$N=\frac{7}{3}mg\sin\theta-m\left(1-\frac{2h}{3R}\right)^2\cdot\frac{u^2}{R}-\frac{4}{3}mg\left(1-\frac{h}{R}\right)>0.$$

因为$\sin\theta$的最小值为$(1-h/R)$，故有

$$\left(1-\frac{2h}{3R}\right)^2\cdot\frac{u^2}{R}<g\left(1-\frac{h}{R}\right). \qquad (4)$$

由式(3)和(4)，圆柱体既能不脱离A点，又能滚上台阶继续前进的条件是：u满足下列不等式

$$\frac{4}{3}gh<\left(1-\frac{2h}{3R}\right)^2u^2<g(R-h).$$

由上式可看出，台阶高度 h 应小于 $3R/7$。▌

例7.24 两均质杆和两均质圆柱滚子，由光滑铰链组成一个系统，如图7.28所示，两杆用弹簧拉住。设滚子滚动时没有滑动，已知杆子的质量为 m，长为 l，铰链至弹簧支点距离 $CD=CE=b$，滚子半径为 R，质量为 M，弹簧系数为 k。系统在 $\varphi=30°$ 时刚好平衡。求系统在这平衡位置附近的微振动频率。

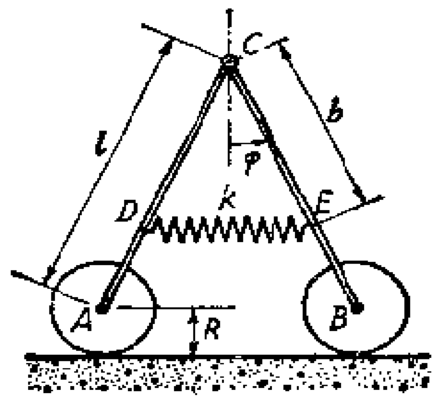


图7.28 求振动频率

解 取一个变量 φ 作为描述整个系统位形的广义坐标。一根杆的动能为 $ml^2\dot{\varphi}^2/6$，滚子中心的速度为 $l\dot{\varphi}\cos\varphi$，所以一个滚子的动能为

$$\frac{3}{4}Ml^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi.$$

于是系统的总动能是

$$T=2\left(\frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2\right)+2\left(\frac{3}{4}Ml^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m+3M\cos^2\varphi\right)l^2\dot{\varphi}^2,$$

或写成

$$T=\frac{1}{2}J(\varphi)\dot{\varphi}^2,$$

其中 $J(\varphi)$ 可叫做折合转动惯量。

弹簧势能为

$$\frac{k}{2}(2b\sin\varphi-l_0)^2,$$

l_0 是弹簧原长，尚待确定。两根杆的重力势能为

$$mgl\cos\varphi,$$

所以系统总势能为

$$V(\varphi)=\frac{1}{2}k(2b\sin\varphi-l_0)^2+mgl\cos\varphi.$$

对$V(\varphi)$依次求两次导数，可得

$$V'(\varphi)=2bk(2b\sin\varphi-l_0)\cos\varphi-mgl\sin\varphi,$$

$$V''(\varphi)=-2bk(2b\sin\varphi-l_0)\sin\varphi$$
$$+2bk(2b\cos^2\varphi)-mgl\cos\varphi.$$

已知$\varphi=30°$是平衡位置，根据第四章中的结果，应有$V'(30°)=0$，由此解出

$$l_0=b-\frac{mgl}{2kb\sqrt{3}}.$$

这个平衡状态的稳定性条件是势能在$\varphi=30°$时取极小值，即$V''(30°)>0$。由此解得弹簧系数应满足

$$k>\frac{2mgl}{3\sqrt{3}b^2}.$$

因为考虑的是在$\varphi=30°$附近的微振动，又根据4-6中的定理，所以系统的微振动频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{V''(30°)}{J(30°)}}.$$

最后可得出

$$\omega^2=\frac{k-\dfrac{2mgl}{3\sqrt{3}b^2}}{\left(\dfrac{2}{3}m+\dfrac{9}{4}M\right)\dfrac{l^2}{3b^2}}.\ \blacksquare$$

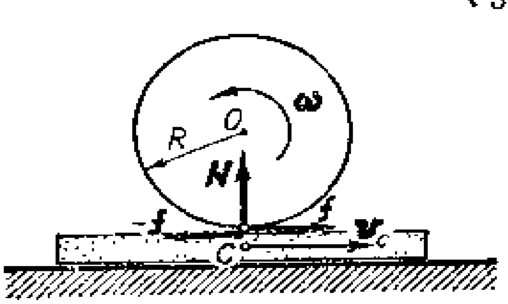


图7.29 平板突然拉动后，球怎样运动？

例7.25 半径为R，质量为m的均质球静止地放在质量为M的均质平板上，板与球之间的摩擦系数为μ，板平放在光滑水平桌面上（图7.29）。如果突然给平板一向右的水平速度u，求证：在时间

$$t<\frac{2Mu}{\mu g(7M+2m)}$$

时球与板之间有滑动；再求出球开始作纯滚动时球的速度和板的速度。

解 设平板质心为C点，由质心动量定理得

$$Mv_C-Mu=\int_0^t(-f)dt,$$

其中f表示摩擦力的大小。当板与球之间有滑动时，有

$$f=\mu mg。$$

因此得

$$Mv_C-Mu=-\mu mgt。$$

设球心为O，根据质心动量定理和相对质心的动量矩定理，并利用初条件$v_0=0$，$\omega=0$，可得

$$mv_0=\mu mgt,$$

$$\frac{2}{5}mR^2\omega=\mu mgRt。$$

球和板之间只滚不滑的条件是

$$v_C=v_0+R\omega。$$

将v_C，v_0和ω的表达式代入，并解出

$$t=\frac{2Mu}{\mu g(7M+2m)}。$$

在这个时刻滑动终止，此后板和球怎样运动，请读者自行分析。将这个t值代入v_C和v_0的表达式中，就得到

$$v_C=\frac{7Mu}{7M+2m},\qquad v_0=\frac{2Mu}{7M+2m}。$$ ▌

例7.26 质量为m，半径为r的均质圆柱体A放在质量为M，半径为R的均质圆柱体B上，而B又放在水平面上，所有接触处的摩擦力足够大，使得圆柱体只能滚动，不能滑动

（图7.30）。两圆柱体的轴都是水平的，且重心都在同一竖直平面内，柱A从最高处自静止开始滚下。分析此问题中所涉及的全部未知量，列出它们所满足的方程，写出在两个柱体脱开以前柱A中心的轨迹方程。

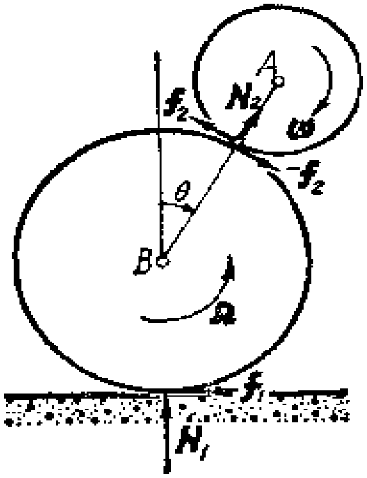


图7.30 分析运动情况

解 设柱B的角速度为Ω，柱A的角速度为ω，两圆柱中心的连线BA与竖直线的夹角为θ。柱B与地面之间，柱A与柱B之间的正压力与摩擦力分别为N_1，f_1和N_2，f_2，它们的大小都是未知量。

对于柱B应用质心运动定理，得两个方程

$$\begin{cases} M\dfrac{dv_B}{dt}=f_1-N_2\sin\theta+f_2\cos\theta, & (1)\\ N_1-Mg-N_2\cos\theta-f_2\sin\theta=0, & (2)\end{cases}$$

其中v_B是柱B质心的速度。由动量矩定理得一个方程

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{d\Omega}{dt}=Rf_1-Rf_2. \qquad (3)$$

同理，对柱A也可以列出三个方程

$$\begin{cases} m\left[(R+r)\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\dfrac{dv_B}{dt}\cos\theta\right]=mg\sin\theta-f_2, & (4)\\ m\left[(R+r)\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2-\dfrac{dv_B}{dt}\sin\theta\right]=mg\cos\theta-N_2, & (5)\\ \dfrac{1}{2}mr^2\dfrac{d\omega}{dt}=rf_2. & (6)\end{cases}$$

上述六个动力学方程涉及八个未知量，即$\Omega,\omega,\theta,N_1,N_2,f_1$，$f_2$和$v_B$。还必须找出两个关系式，这两个关系式只能从运动学

关系中去寻求。

因柱 B 相对地面无滑动，所以有

$$v_B + R\Omega = 0. \qquad (7)$$

两个柱之间无相对滑动，有

$$R\Omega = r\omega - (R+r)\frac{d\theta}{dt}. \qquad (8)$$

至此得出了八个方程，可以从中解出八个未知函数。应该指出，这些方程只适用于两个柱体互相接触的情况，一旦两柱体脱开，就必须重新列方程。

为了求出柱 A 中心的轨迹方程，设此中心的直角坐标为(x_A, y_A)，坐标原点取在开始时柱 B 中心的位置，x 轴水平向右，y 轴竖直向上。于是

$$\begin{cases} x_A = x_B + (R+r)\sin\theta, & (9) \\ y_A = (R+r)\cos\theta, & (10) \end{cases}$$

其中 x_B 是柱 B 中心的坐标。

设 x_C 表示两个圆柱所组成的系统的质心坐标，根据质心运动定理，有

$$(m+M)\ddot{x}_C = f_1,$$

即

$$m\ddot{x}_A + M\ddot{x}_B = f_1.$$

将上式与前面所得的两个动量矩方程(3)和(6)联立，消去 f_1 和 f_2，可得出

$$MR\dot{\Omega} + mr\dot{\omega} = 2m\ddot{x}_A + 2M\ddot{x}_B.$$

经一次积分，得

$$MR\Omega + mr\omega = 2m\dot{x}_A + 2M\dot{x}_B.$$

将运动学关系式(7)和(8)代入，又因为 $v_B = \dot{x}_B$，得

$$(3M+m)\dot{x}_B + 2m\dot{x}_A = m(R+r)\dot{\theta}.$$

再积分一次，得

$$(3M+m)x_B+2mx_A=m(R+r)\theta. \tag{11}$$

将式(9)和式(11)联立，消去 x_B，即得

$$x_A=(R+r)\frac{m\theta+(3M+m)\sin\theta}{3(M+m)}, \tag{12}$$

式(12)和式(10)便是柱 A 中心轨迹的参数方程。▌

例7.27 三体问题 n 个质点彼此在万有引力作用下运动的问题称为 n 体问题。n 体问题是天体力学中的一个基本问题。$n=2$ 时的二体问题是容易解决的。$n=3$ 时的三体问题至今尚未完全解决。现在我们讨论三体问题的首次积分。

解 任意两个质点之间的万有引力的大小为

$$F_{ij}=\gamma m_i m_j/r_{ij}^2.$$

在适当选用 F，m，r 的单位后，可以使 γ 的数值恰好为 1，因而下面略去它不写。

在解决三体问题时，认为其他物体都远离这三个质点，即假设系统是孤立的。

当取无穷远处为零势能点时，三个质点组成的系统的势能为

$$V=-\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}}+\frac{m_2m_3}{r_{23}}+\frac{m_3m_1}{r_{31}}\right).$$

三体问题共有十个首次积分：

（一）动量守恒对应三个方程

$$\begin{cases}m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2+m_3\dot{x}_3=c_1,\\ m_1\dot{y}_1+m_2\dot{y}_2+m_3\dot{y}_3=c_2,\\ m_1\dot{z}_1+m_2\dot{z}_2+m_3\dot{z}_3=c_3.\end{cases}$$

（二）质心运动方程有三个

$$\begin{cases}m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3=c_1t+c_4,\\ m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3=c_2t+c_5,\\ m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3=c_3t+c_6.\end{cases}$$

（三）动量矩守恒对应三个方程

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i) = c_7, \\ \sum_{i=1}^{3} m_i(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i) = c_8, \\ \sum_{i=1}^{3} m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) = c_9. \end{cases}$$

（四）机械能守恒对应一个方程

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + V = c_{10}.$$

三个质点在空间共有 9 个独立坐标，由牛顿方程对每一个独立坐标可列出一个二阶微分方程，因此共有九个二阶微分方程。上述十个首次积分可以使整个方程组降十阶，最后只剩八阶。从1750年至1927年间，关于三体问题的论文已超过八百多篇。1887年 Bruns 证明新的代数通积分是不存在的，因此只有在某些特殊的条件下才能找到新的首次积分。▌

例7.28 弹簧片一端有一集中质量M，另一端固定在水平地面上(图7.31)。设弹簧片本身的质量为m（均匀分布），长度为l，刚度系数为k。考虑弹簧片的质量，求系统的横向微振动频率。

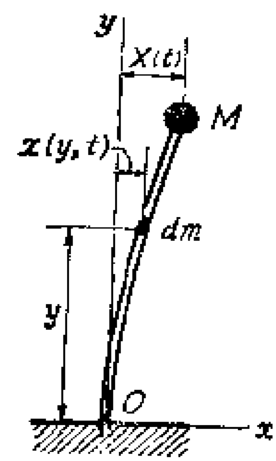


图7.31 簧片质量对振动频率的影响

解 我们引用一种近似方法解这个问题，精确的方法将在振动理论中讨论。

假定在振动时弹簧片保持抛物线的形状，那么片上任意点的位置坐标x,y有如下关系：

$$x(y,t) = X(t)\left(\frac{y}{l}\right)^2,$$

其中$X(t)$是质量M的水平位移，也就是簧片端点的x坐标。因为

簧片在振动，所以它是时间的函数。

质量M的动能是$M\dot{X}^2/2$，弹簧片上质量为$dm=(m/l)dy$的小单元①的动能是

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{l}\right)dy(\dot{x})^2=\frac{1}{2}m\dot{X}^2\left(\frac{y}{l}\right)^4 d\left(\frac{y}{l}\right).$$

所以弹簧片的总动能是

$$\frac{1}{2}m\dot{X}^2\int_0^1\left(\frac{y}{l}\right)^4 d\left(\frac{y}{l}\right)=\frac{1}{10}m\dot{X}^2.$$

系统的势能为$kX^2/2$。根据机械能守恒定理可得

$$\frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{5}\right)\dot{X}^2+\frac{1}{2}kX^2=\text{常量}.$$

当$m=0$时，这就是单自由度微振动的能量积分，其振动频率是$\omega=\sqrt{k/M}$。因此，在计入簧片质量以后，系统的微振动频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{M+m/5}}.$$

这相当于把五分之一的弹簧片质量附加到M上去"参与振动"的结果。如果我们假定在振动过程中，弹簧片所保持的形状不是抛物线，而是一条其他形状的曲线，那么m前的系数(1/5)就会有所变化。

以上虽然是一种近似方法，但是在某些工程问题中已经足够精确。例如，设$m=0.2M$，则用近似法算出$\omega=0.9806\sqrt{k/M}$，而由振动理论精确方法计算的结果是$\omega=0.9756\sqrt{k/M}$。▌

7-7 关于动力学的三个定理

第四章中讲了牛顿定律，第五、六、七章中讲了动力学的三个基本定理以及相应的三个守恒定理。关于它们还需再说明几

① 在微振动中，$x\ll l$，故弧长微分等于dy。

点。

从推导过程来说，我们是从牛顿定律推导出了三个守恒定理的。但是必须明确，我们并沒有证明三个守恒定理，只不过导出了牛顿定律的不同表现形式。这些定理是否真是客观规律，要通过实验才能证明，如同牛顿定律需要通过实验证明一样。事实上，守恒定理已被许多实验所证明，反过来为牛顿定律的正确性提供了重要的材料。

其次，我们要说并不是在所有情况下都可以从牛顿定律导出三个守恒定律的。设有两个运动的带电粒子1和2，粒子2对粒子1的作用力是$\boldsymbol{f}_{12}$，粒子1对粒子2的作用力是$\boldsymbol{f}_{21}$。由于运动电荷电磁场的作用，一般说来这两个力并不一定大小相等、方向相反、沿1和2的联线。由这两个粒子所组成的“质点系”的动量以及动量矩将改变。如果不仅考虑粒子的动量或动量矩，而且也考虑电磁场的动量或动量矩，那么“粒子加场”的总动量以及总动量矩仍然是守恒的。这样的结论当然无法由牛顿力学说明，请参阅有关的物理学书籍①。三个守恒定律比牛顿定律更具有普遍意义。

至于在经典力学范围内，包括本课程和连续介质力学，可以认为牛顿定律和动力学的三个基本定理是等价的。在物理中经常考虑某些封闭的体系，因而强调了动量、动量矩和能量的守恒性，强调的是三个守恒定律。在力学中（包括质点、刚体、连续介质等）则经常要考虑系统受到外力的作用，因此较多地用到三个基本定理，有时把三个基本定理统称为**均衡定律**（balance laws）以区别于守恒定律。

同一个力学问题，从原则上说可以用牛顿定律列出微分方程求解，也可以用均衡定律求解，这需要灵活应用，方能删繁就简。

---

① 例如，R.P.费曼等著，王子辅译：《费曼物理学讲义》第二卷，1981年，上海科学技术出版社，§26-2和§27-6，特别是其中图26-6。

习　题

7.1 重 65 公斤的人在道路上行走，每走一步他的重心被抬高 2 厘米。如果他每一步的距离为75厘米，求他行走 3 公里路程时所做的功。

7.2 打桩机的大锤重500公斤，每分钟举起14次，每次举高 3 米。假定每个工人的平均功率为 7 公斤·米/秒，问这台机器相当于多少工人做工。

7.3 一汽船以 10 节的速度作等速航行，它的机器的功率是 5000 马力，机器的效率为 0.6，求水对汽船的阻力（取两位有效数字）。

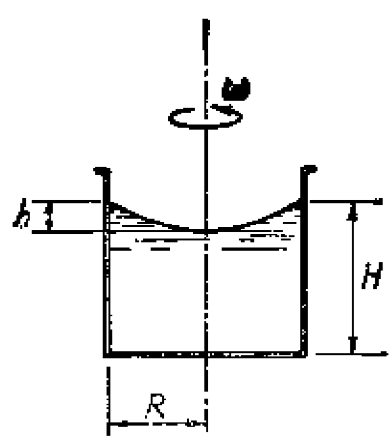
（注：　1节＝1浬/小时≈1.85 公里/小时，　1马力＝75 公斤·米/秒。）

7.4 一电机功率为 4 千瓦的水泵机组，其效率为0.6，如要将 900 立方米的水打到12米高的地方，问需多长时间？

7.5 人拉物过山。假设山为一正圆锥体，且物体放在山坡上时，刚刚能够放上而不滑。现要将物体自山脚一点处拖到山背后与其对称的一点处，如不计人过山时为自己所消耗的功，证明人拖着物体经过山顶与拖着物体沿山脚平地到达该处所做的功之比为 $2:\pi$。



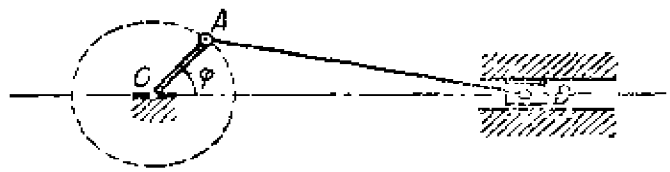
题 7.5 图



题 7.6 图

7.6 底面半径为R的圆柱形容器与其中所盛的液体一起绕自身的对称轴以角速度ω旋转，这时液体的自由面成为旋转抛物面。已知距离h和H，液体密度为ρ，求旋转液体的动能。

7.7 求图示曲柄连杆机构的动能。已知曲柄OA是长为r，质量为m_1的均质直杆，滑块B的质量为m_2，连杆AB的长度为l，它的质量可以忽略不计，曲柄OA的转角为φ，其转动角速度$\omega=\dot{\varphi}$。

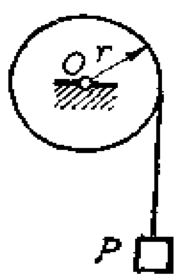


题 7.7 图

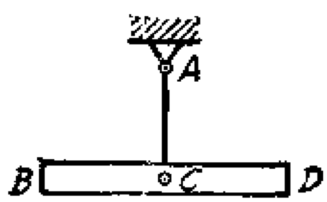
7.8 如果炮筒螺旋线的螺距为h，求半径为r，以匀角速转动的重P的炮弹以速度V离开炮口时的动能（炮弹可视为一实心圆柱体）。

7.9 均质细杆长$2l$，其上端铰链于一固定点并竖直悬挂。如要这杆在竖直平面内绕其悬挂点转一整圈，求杆应具有的最小初始角速度。

7.10 在半径为r，重为Q并能绕水平轴O转动的滑轮上绕一绳，绳的一端悬挂一重P的物体。系统从静止开始释放，当物体下落距离h时，求滑轮的角速度（滑轮按均质圆柱体处理）。



题 7.10 图



题 7.11 图

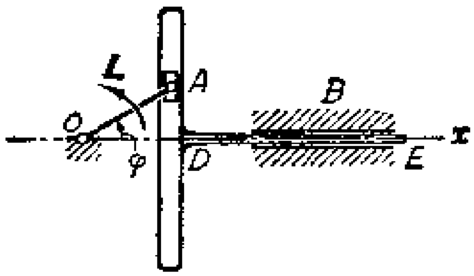
7.11 长$2l$，重W的均质杆BD，由通过其重心C的杆AC悬挂，杆AC长为l，不计它的重量。

（1）假定铰C处无摩擦，求系统微振动周期，并描述两根杆

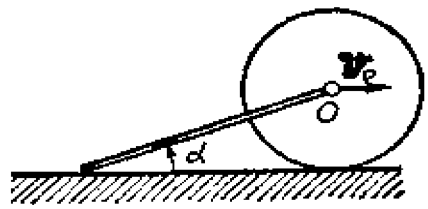
的运动状态；

（2）假定C处刚性连结，求系统微振动周期。

7.12 在图示机构的曲柄OA上，作用一大小不变的力矩$\boldsymbol{L}$。初始时系统处于静止状态，且$\varphi=\varphi_0$（见图）。已知曲柄OA长r，相对于转轴O的转动惯量为J。连杆部分的重量为P，杆DE与导轨B之间的摩擦力为常值F。不计滑块A的质量，也不计它与滑槽之间的摩擦。当曲柄OA转过一周时，求曲柄的角速度。



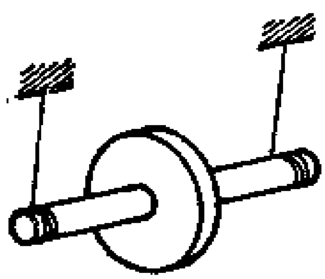
题 7.12 图



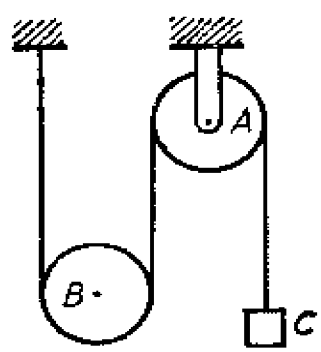
题 7.13 图

7.13 一半径为r的圆柱形碾子搁在水平地面上，它的把手（当作细直杆）也靠在地面上。假定碾子和把手一样重，并且都是均质的。把手与地面之间的夹角为α，摩擦系数为μ。开始时，碾子中心O的水平速度为v_0，碾子只滚不滑。求碾子在停止前所行的距离s。

7.14 半径为R，质量为M的均质圆盘，装在半径为r，质量为m的均质圆柱形轴上，并由绕在此轴上的两条竖直线挂起（马克斯威尔摆）。开始时轴在水平位置，并且盘心至两线的距



题 7.14 图

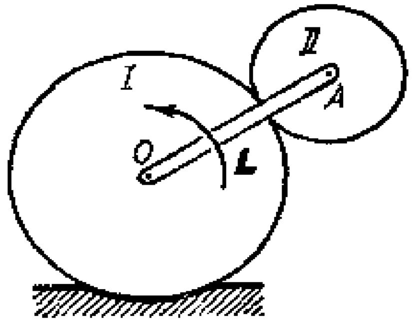


题 7.15 图

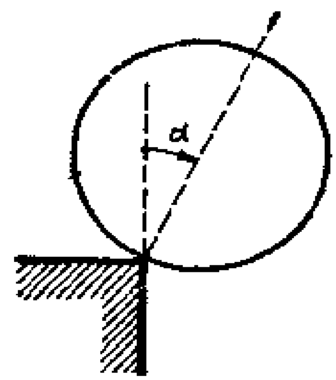
离相等，然后释放。求圆盘向下降落时，盘心的加速度和线中的张力。

7.15　一端固定的细线绕过动滑轮 B 和定滑轮 A。动滑轮 B 的半径为 r，质量为M，绕其对称轴的转动惯量为 J，而定滑轮 A 具有同样的半径，但转动惯量为 J_1。线的自由端 C 挂有质量为 m 的重物。设在运动过程中线的各段都保持在同一竖直平面内，滑轮与线之间都沒有相对滑动，求重物的加速度的大小 a。

7.16　周转转动机构在水平面内运动。作用在曲柄 OA 上的不变力矩 $\boldsymbol{L}$ 使机构由静止开始运动。曲柄 OA的重量是Q，定齿轮Ⅰ的半径是 r_1，动齿轮Ⅱ的半径是 r_2，重量为P。齿轮可看作是均质圆盘，曲柄是均质直杆。求曲柄 OA 的角速度（以 OA 和它的初始位置的夹角 φ 表示）。



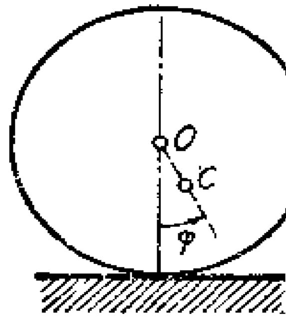
题 7.16 图



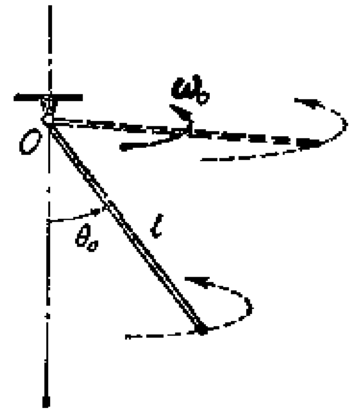
题 7.17 图

7.17　半径为 r 的均质圆柱体（见图），初始时静止在台边上，且$\alpha=0$，受到小扰动后无滑动地滚下。求圆柱体离开水平台时的角度 α 和这时的角速度。

7.18　半径为 r 的圆柱体可以在水平地面上无滑动地滚动。圆柱的重心在 C 点，它与几何中心 O 的距离$OC=a$。圆柱相对于过重心 C 且与几何轴平行的轴之迴转半径为 k。以 φ 角表示 OC 与向下竖直线的夹角。初始时圆柱体静止，且 $\varphi=\varphi_0$，然后释放。求圆柱体的角速度（表成 φ 角的函数）。



题 7.18 图



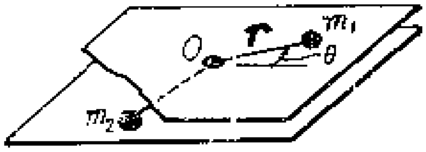
题 7.19 图

7.19 长 l 的均质棒能在空间自由地绕球铰链O旋转。初始时将棒放在水平位置，并在水平面内给棒一初始角速度 ω_0，求在以后的运动中棒与竖直线所成的最小角度 θ_{min}。

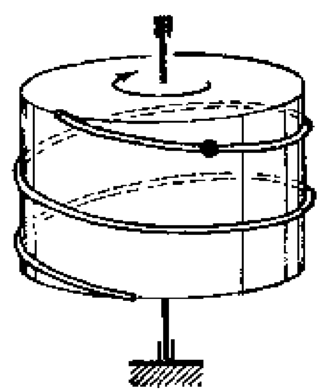
7.20 两个平行而非常靠近的光滑水平面间放一个质量为 m_2 的小球，小球连系在一根不可伸长的光滑轻绳上，绳子穿过上平面中的一个小孔O，绳子的另一端连着一质量为 m_1 的小球，这个小球放在上平面上（见图）。初始时绳被拉紧而小球 m_1 位于距离小孔 $r(0)=a$ 处，并获得一垂直于绳子的速度 u。视两小球为质点，不计任何阻力。

（1）用极坐标表示小球 m_1 的运动方程（即 $r(t)$ 和 $\theta(t)$）；

（2）求运动过程中绳中的张力（表示成 r 的函数）。



题 7.20 图

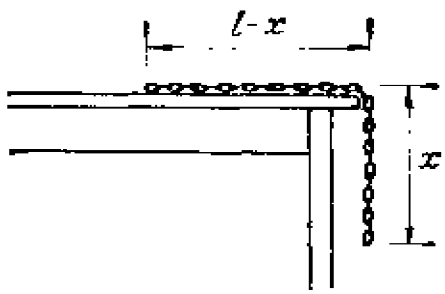


题 7.21 图

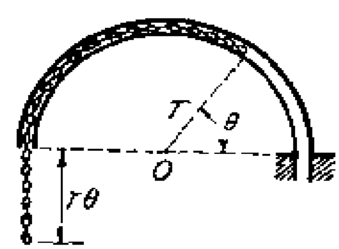
7.21　一细管在直圆柱上绕成螺旋形。圆柱可绕其对称轴(竖直安放，见图)自由转动。初始时静止，有一小球无初速地从管的上端放入。已知管子质量为M，螺距为h，管子圈数为n，小球质量为m，圆柱半径为r，不计圆柱质量，不计摩擦。当小球从管子的下端离开管子时，求圆柱的角速度和小球的绝对速度。

7.22　一长为l的细杆，上端铰链于固定点，能在竖直平面内自由摆动。初始时将杆置于水平位置然后无初速地释放，求在任意位置悬挂点对杆的作用力与杆轴所成的角度（表示成杆与向下竖直线夹角φ的函数）。

7.23　一柔软的均质链条，长为l，放在光滑的水平桌面上。开始时链条是直的和静止的，且下垂部分的长度为x_0，求链条释放以后在还没有脱离桌面时的速度表达式，以图中下垂部分长度x表示。



题 7.23 图

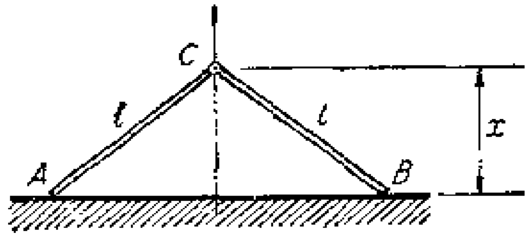


题 7.24 图

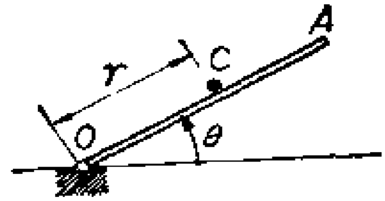
7.24　在竖直平面内有一光滑的半径为r的半圆管道，管道内放一长为πr的均质链条，如图所示。链条由于受到轻微扰动而从管道口处向外滑出，求链条对应于任意θ角的速度。

7.25　图示系统由两根长度都是l的均质直杆组成，C点为光滑铰链，杆在竖直平面内运动，A和B处为光滑接触。若取C点的高度x为广义坐标，写出系统的运动微分方程。如果初始时$x=h$，然后无初速地释放，求C点着地时的速度。

7.26　均质直棒OA，长为l，在水平面上能绕其一固定端O自由转动，并驱动一个在棒前的小球C。球与棒的质量相同。初



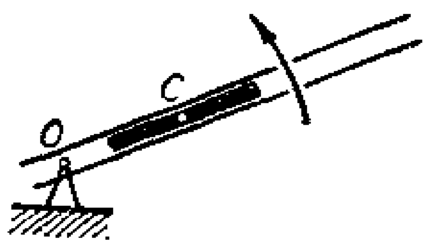
题 7.25 图



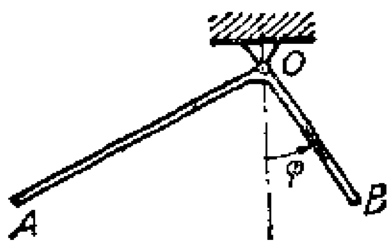
题 7.26 图

始时小球静止在棒前并离O点很近，同时此棒以某一角速度旋转。假定所有接触都是光滑的，求当小球离开端点A的瞬间，小球的绝对速度与棒所成的角度。

7.27 光滑细管，不计其质量，可以在水平面内绕固定点O自由转动。管内有一均质直杆，长为$2a$，杆的中点C离O点的距离为a，杆与管均是静止的。现给这个系统一初始角速度ω，求证杆在管内相对滑动的极限速度是$2a\omega/\sqrt{3}$。



题 7.27 图



题 7.28 图

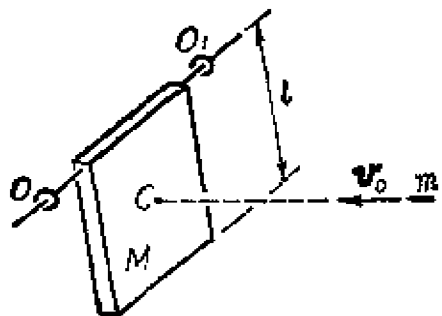
7.28 一摆由均质的直角弯杆AOB组成，O点为悬挂点，AOB在同一竖直平面内运动。设$OB<OA$，OB与向下竖直线的夹角为φ，平衡位置为$\varphi=\varphi_0$。现将OA杆置于水平位置，然后无初速地释放，求φ角的最大值。

7.29 说明为什么人在荡秋千时能用以下方法增加摆动的幅度。摆到最高点时身体突然下蹲，经过最低点时身体突然伸直，以后再重复这个过程。

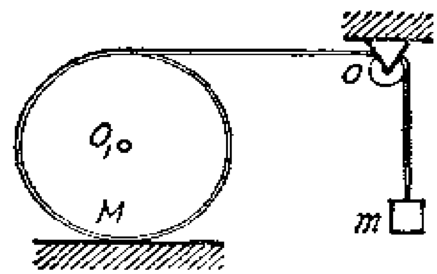
7.30 一空心球，内半径为r，外半径为R，内部充满密度与球壁相同的液体，假定液体与球壁无摩擦。将这球放在一不光

滑的斜面上，使之无初速无滑动地下滚。设在时间 t 内它滚过的距离为 s 。另一个均质的实心球在同样条件下滚过同样的距离所需时间为 t_1，求时间 t 与 t_1 之比值。再求在同一时间内两球滚过的距离之比。

7.31 一木板质量为 M，长为 l，静止地悬挂在水平轴 OO_1 之下（见图）。现有一质量为 m，速度为 v_0 的子弹垂直射入木板中心处，求木板摆动的最大角度。



题 7.31 图



题 7.32 图

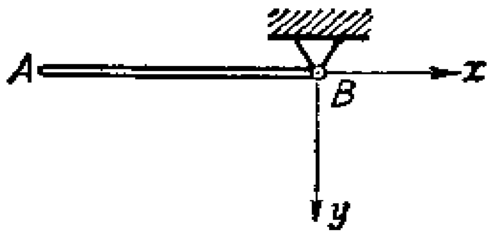
7.32 质量为 M 的均质圆柱体，放在一不光滑的水平桌面上。柱的外周绕一轻绳，绳子绕过滑轮 O 并挂一质量为 m 的重物。不计滑轮质量，假设圆柱只滚不滑，并且圆柱体与滑轮之间的绳子是水平的。求圆柱体中心 O_1 的加速度 a_1，重物的加速度 a_2 及绳中的张力。

7.33 在上题中，如圆柱体开始时以角速度 Ω 向离开滑轮的方向无滑动地滚动，问经过多长时间重物的速度为零并开始下落。

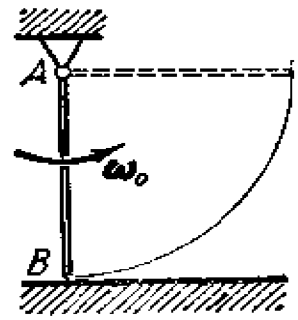
7.34 一质量等于 M 的炮弹以速率 V 向前运动。炮弹内部的爆炸产生能量 E，并将炮弹分成两碎片。假设不计火药的质量，能量 E 全部转化为机械能，一片的质量等于另一片的 k 倍，并且两碎片仍沿原来的方向运动。求两碎片的速度各为多少？

7.35 均质杆 AB，长为 $2l$，B 端由铰链固定住，A 端用手托住。初始时杆位于水平位置然后无初速地释放。当杆位于竖直位置时，B 端铰链突然脱落。求在以后的运动中，杆的角速度和

杆中心的运动轨迹。



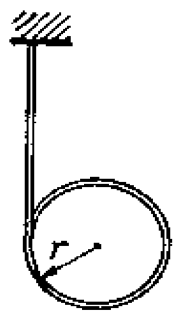
题 7.35 图



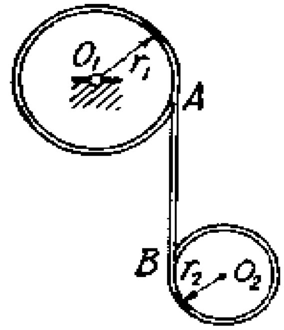
题 7.36 图

7.36　一均质杆 AB，长为 $2l$，在 A 端用铰链挂起。另一端 B 正好与水平地面接触，但无相互作用力。今使杆具有一初始角速度 ω_0，当杆处于水平位置时 A 端铰链突然脱开。以后杆的运动只受重力的影响，问 ω_0 为多大时，方能使杆落地时处于竖直位置？

7.37　一端固结于天花板上的绳子，另一端绕在一个半径为 r，重为 P 的均质圆柱的中间。在重力作用下圆柱体下落，绳子始终保持竖直。求圆柱中心的加速度、圆柱的角加速度和绳中张力。



题 7.37 图



题 7.38 图

7.38　两均质圆柱体的重量分别为 P_1 和 P_2，底面半径分别为 r_1 和 r_2。如图，在它们的柱面中间用一根不可伸长的细绳缠联着，细绳 AB 段恰成竖直线。圆柱 A 可绕固定轴 O_1 自由转动，圆柱 B 在重力作用下由静止下落，经过时间 t 时（假设该瞬时两圆

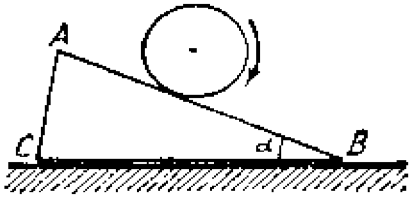
柱上还有绳缠着），求：

（1）两个圆柱的角速度 ω_1 和 ω_2；

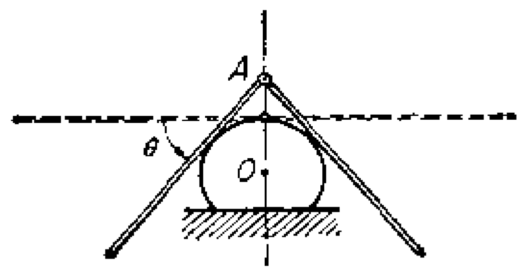
（2）圆柱 B 的中心 O_2 下落的距离；

（3）绳中张力。

7.39 在光滑的水平面上放置一个质量为 M 的三棱柱 ABC，$\angle ABC=\alpha$。一质量为 M，半径为 r 的均质圆柱体沿斜面 AB 无滑动地滚下。求三棱柱的运动加速度和圆柱的角加速度。



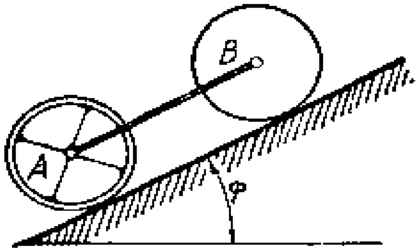
题 7.39 图



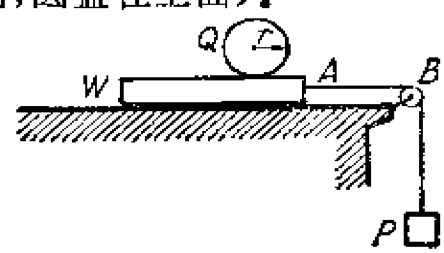
题 7.40 图

7.40 两均质的、长度都为 $2a$ 的直杆由铰链 A 连系，被对称地放在一水平躺着的光滑圆柱面上，圆柱半径为 $\sqrt{2}a/3$。初始时两杆举成水平形状并使铰链 A 与柱面接触，然后无初速地释放，以后两杆总是在垂直于柱面的竖直平面内运动。证明：当它们的速度再次为零时，杆与水平线的倾角为 $\theta=\arccos(1/3)$，杆与柱面接触处的压力等于杆重的 1/4，两杆之间无相互作用力。

7.41 均质圆盘和圆铁环（假定质量全部均匀地分布在环上）质量都是 m，半径都是 r，两者的中心用轻杆 AB 铰接。系统无滑动地沿倾角为 φ 的斜面滚下且保持在竖直平面内运动。求杆 AB 的加速度 a 和杆中内力 N（如图，圆盘在上面）。



题 7.41 图



题 7.42 图

7.42　重$Q=2P$，半径为r的圆柱体放在重$W=P$的水平木板上，木板放在水平桌面上。有一轻绳，一端A拴在木板上，另一端绕过光滑的小轮B挂一重P的物块。木板和圆柱、桌面间的摩擦系数都是$\mu=1/4$。初始时系统静止，圆柱的对称轴垂直绳子。求物块的加速度a和圆柱的角加速度ε。

7.43　质量均为m的两个质点A和B，由长为l的无弹性的轻绳连结。初始时它们静止在光滑桌面上，B点在桌子的边沿，A点在里面，A与B的距离为l且AB垂直桌边。现对B点向桌外轻轻推动一下，B点离开桌面而下落。证明：

（1）当A点离开桌面时，绳中的张力冲量为$m\sqrt{gl}/2$（假定A与桌面间无冲量作用）；

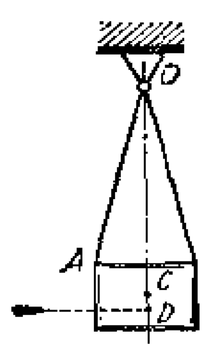
（2）当A与B再次在同一水平线上时，它们下落的高度均为$l(4+2\pi+\pi^2)/8$。

7.44　质量为M，半径为r的均质圆环直立在水平地面上，在圆环的垂直方向受到一个速率为V，质量为m的小球的打击，打击点恰好在圆环的最高点。小球与圆环的碰撞恢复系数为e。证明：当

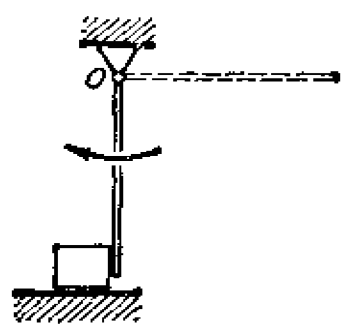
$$V=\frac{\pi(3m+M)\sqrt{2gr}}{8m(1+e)}$$

时，圆环恰好是呈水平状落地的。

7.45　测定枪弹速度用的射击摆由一悬挂于水平轴O的筒



题 7.45 图



题 7.46 图

AB 制成，筒的一头 A 开启，筒内填满沙土。飞入筒内的枪弹使得这摆绕其轴 O 转过某一角度。已知摆的质量为 M，重心 C 到轴的距离 $OC=h$，相对于轴 O 的回转半径为 ρ。枪弹质量为 m，枪弹到轴 O 的距离 $OD=a$，摆的最大偏角为 α。设摆轴 O 不感受碰撞，即 $ah=\rho^2$，求枪弹的速度。

7.46　一均质杆的质量为 M，长度为 l，其一端固定在铰链 O 上，杆由水平位置无初速地下落。当杆运动到竖直位置时撞在一质量为 m 的物块上，使物块沿粗糙的水平面滑动。设滑动摩擦系数为 μ；又设碰撞是完全非弹性的，物块的重心与杆端在同一水平位置，求物块滑行的距离（图见上页）。

7.47　质量为 $2m$，半径为 a 的均质薄球壳，静止地放在水平桌面上。在球内壁的最高点挂一弹性轻绳，其弹性系数为 $k=5mg/a$，自然长度为 a。绳的另一端挂一质量为 m 的小球。小球与球壳、球壳与地面之间的碰撞恢复系数分别为 $e_1=1/2$，$e_2=0$。如果开始时质点在壳内最低点，并使得绳子是拉紧的和竖直的，然后释放。证明：

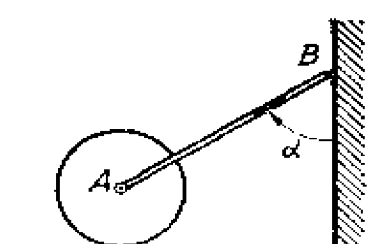
（1）小球将于球壳碰撞；

（2）球壳在空中运动的时间 $t=\sqrt{a/g}$；

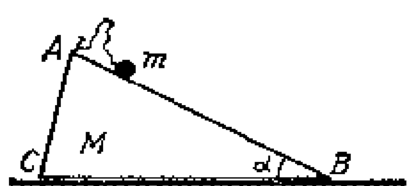
（3）在此时间内绳子保持松弛。

并求在以后的运动中小球在球壳中心以下的最大距离 d。

7.48　图示均质圆柱 A 的半径为 r，质量为 M，均质杆 AB 的长度为 l，质量为 m。铰 A 和墙 B 处都是光滑接触，地面相当



题 7.48 图



题 7.49 图

粗糙，以至圆柱只滚不滑。初始时系统静止，且$\alpha=45^\circ$，然后释放，求初始时刻A点和B点的运动加速度、杆的角加速度。

7.49 质量为M倾角$\alpha=30^\circ$的三棱柱放在光滑水平面上。一根自然长度为l，弹性系数$k=2mg/l$的弹性轻绳，其一端拴在光滑斜面上的A点处，另一端系有质量为m的质点。初始时质点位于A点，系统静止，然后释放（图见上页）。

写出系统的能量和水平动量方程，证明：

（1）质点的速度再次为零时它离A点的距离为$2l$；

（2）当质点离A点的距离为$5l/4$时三棱柱的速度达其最大值。

又求绳子刚拉直时质点相对三棱柱的速度。

7.50 质量均为m的四个相同的质点A,B,C和D，由等长的不可伸长的轻线AB,BC,CD和DA连结成一个菱形，线是被拉直的且静止在光滑水平桌面上，$\angle BAD=2\alpha(\alpha<\pi/4)$，质点$A$受$CA$方向的打击后得速率$V$，求质点$C$的速度大小。并证明系统的初始动能为$2mV^2/(1+2\sin^2\alpha)$。

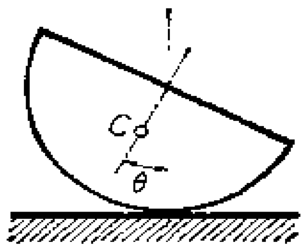
7.51 两个相同的质点A和B放在光滑水平桌面上，用不可伸长的轻绳相连且拉直。第三个相同的质点C在桌面上沿垂直于AB方向运动且击中AB的中点。证明：在以后的运动中，在A和B碰撞之前，C点不脱离绳子。

又证明：在A和B碰撞前的瞬间，C点的动能只是其原来的九分之一。

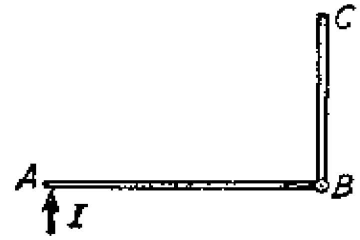
7.52 光滑球A碰撞在静止的、相同的球B上，A的速度方向与两球碰撞时刻公法线的夹角为θ。证明：当$\mathrm{tg}^2\theta=(1-e)/2$时，$A$被偏转的角度最大，且等于$(\pi/2)-2\theta$，$e$是两球间的碰撞恢复系数。进一步证明，在这种情况下动能损失了原来的$(1-e^2)/(3-e)$倍。

7.53 均质的实心半圆球体，其半径为a，初始时$\theta=\pi/2$（见图），无初速地释放，假定地面摩擦力足以阻止滑动，证明：

$$\dot{\theta}^2 = 15g\cos\theta / a(28 - 15\cos\theta).$$



题 7.53 图



题 7.54 图

7.54 均质杆AB的长为$2a$，质量为$2m$。均质杆BC的长为$2b$，质量为m，B为光滑铰链，且$\angle ABC = 90°$(见图)，两杆静止地放在光滑水平面上。今在A端沿BC方向作用一冲量I，证明系统受打击后的动能为$5I^2/6m$。

7.55 一重w的锤子以速率v打在一无弹性的重量为p的钉子上，速度沿着钉子的方向，钉子钉在一重为Q的木块中，木块能在水平面上自由滑动。求证：如果木块作用在钉子上阻力的平均大小为R，则每打击一下，钉子穿进木块的距离为

$$\frac{Qw^2}{(Q+w+p)(w+p)} \cdot \frac{v^2}{2gR}.$$

7.56 单位质量的质点p在斥力$\omega^2\overline{Op}$的作用下运动，质点以速率$a\omega\sqrt{6}$从A点发射，方向沿直线AOB，这里$AO=a$，$BO=2a$。证明质点从A到B的时间为$\ln(1+\sqrt{6})/\omega$。

如果在B处有固定的弹性墙，墙平面垂直于AOB，质点与墙之间的碰撞恢复系数为e，且$e<2/3$。证明质点将不再回到A点。

7.57 半径为a的圆环在水平地板上以速率V无滑动地滚动，环平面保持在竖直平面内。当它碰到无弹性的高为h($<a/2$)的台阶时（台阶前缘与环平面垂直）。证明：如果

$$4a^2hg < V^2(2a-h)^2 < 4a^2(a-h)g,$$

则环能不脱离接触地爬上台阶。

另一方面，当环以速率U向台阶下滚动时，证明：如果

$$U^2<(a-2h)g,$$

则环能不脱离接触地滚下台阶。

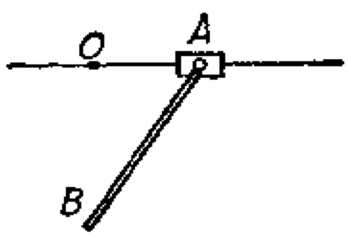
7.58 长为$2a$的均质杆AB可以绕其A端自由转动，而A端可以在光滑的水平直杆上自由滑动。初始时A端位于固定点O处，杆静止地悬挂着。然后使A突然以运动规律

$$\overline{OA}=vt+\frac{1}{2}ft^2$$

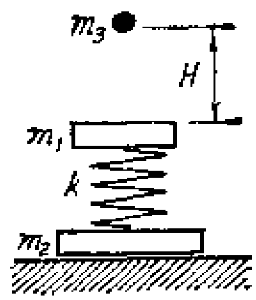
运动，其中v和f为常量。证明：杆的初始角速度$\omega=3v/4a$，如果

$$3v^2>8a(g+\sqrt{g^2+f^2}),$$

则杆将完成绕A点转动整圈。



题 7.58 图



题 7.59 图

7.59 质量分别为m_1，m_2的两块板，中间用刚性系数为k的弹簧固连起来。今在上板的上方掉下一质量为m_3的泥巴。问高度H至少为多少时，方能使上面的板跳起来时能带动下面的板？

7.60 长为$2a$的均质杆直立在水平桌面上无初速地倒下，桌面相当粗糙足以阻止滑动。

（1）证明：当杆与竖直线夹角为θ时，杆的角速度为

$$\sqrt{3g/a}\cdot\sin(\theta/2);$$

（2）讨论杆会不会跳起来。

7.61 长$2a$的均质杆直立并靠在光滑墙上，杆在垂直于墙的

竖直平面内倒下，开始时上端离墙。设地面光滑，证明杆子倒在地下时，杆子质心的速度大小等于$\sqrt{14ga}/3$。

7.62 均质圆锥体的质量为M，高为h，顶角为2α。它可以绕通过底面直径的水平轴自由转动。初始时圆锥轴线位于水平位置，然后无初速地释放。求圆锥轴线位于竖直位置时作用在轴上的反力。

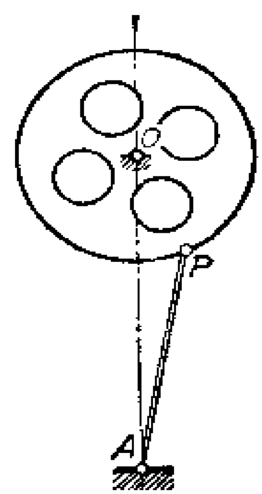
7.63 质量为m，半径为a的圆盘直立放置在相当粗糙的水平面上。质量为m的质点p固定在圆盘的边缘，圆心为O，Op与向上竖直线成θ角。初始时$\theta=60°$，初始角速度为零。证明：

（1）$a(7+4\cos\theta)\dot{\theta}^2=2g(1-2\cos\theta)$；

（2）当Op第一次成水平时，O点的加速度为$18g/49$，并求此时平面对盘子的反作用力。

7.64 一质量为$2m$，长为a的均质杆AB挂于光滑铰链A上，B端固结有质量为m的质点，B端由弹性系数为$2mg/a$，自然长度为$a/2$的弹性绳子与C点相连，$AC=2a$，C在A点的竖直下方。证明：杆子在平衡位置附近微振动的周期为$\pi\sqrt{5a/3g}$。

7.65 图示均质飞轮可绕过中心O的水平轴自由转动。飞轮质量为M，半径为a，可视为一个圆盘，盘上开有四个均布的小孔，小孔半径为$a/4$，圆孔中心在半径的中点。弹性绳PA将圆盘边缘一点P与固定点A相连，弹性绳的自然长度为a，弹性系数为$2Mg/a$，$AO=3a$。证明飞轮作微振动时其单摆折合长度是$55a/288$。



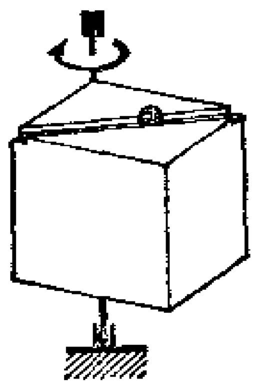
题 7.65 图

7.66 边长为$2a$，质量为m的均质正方体可以绕其一竖直边自由地转动，在它的上表面上沿对角线有一光滑的直槽，此槽不和转动轴相交（见图）。质量为$2m/3$的质点放在槽的中点，系统处于静止状态。现给正方体一初始角速度Ω，当质点离开槽

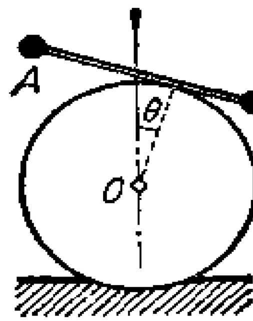
时，质点相对槽的速率为V，正方体的角速度为ω，证明：

（1）$\sqrt{2}V=4a(2\omega-\Omega)$；

（2）ω满足方程 $6\omega^2-6\omega\Omega+\Omega^2=0$。



题 7.66 图



题 7.67 图

7.67 图示均质杆 AB，长为 $2a$，质量为M，放在不光滑的半径为a的圆柱体上。杆的两端各有质量为m的质点，平衡时AB的中点与圆柱面的最高点重合，且AB为水平位置。现给杆一竖直面内的小扰动，杆与柱面间无滑动，证明系统的动能为

$$\frac{a^2\dot{\theta}^2}{6}[3\theta^2(M+2m)+(M+6m)]\text{；}$$

杆在平衡位置附近微振动的周期为

$$2\pi\left[\frac{a(M+6m)}{g(3M+6m)}\right]^{1/2}\text{。}$$

7.68 一根金属线弯曲成本性方程为$s=(a\,\mathrm{tg}\psi)/4$的曲线（s是弧长，ψ是切线与水平方向的夹角），它被安放在竖直平面内，顶点向上。一半径为a的均匀圆盘在曲线上无滑动地滚下，其运动平面在曲线所在的竖直平面内。初始时圆盘静止在曲线的顶点。证明：圆盘离开曲线时其公法线与竖直线的夹角为$\pi/3$。

7.69　半径为a的均质圆柱体，在内半径为$a+c$的固定圆管内运动。圆管轴和圆柱轴平行且均呈水平。初始时圆柱在最低点且角速度$\omega_0=\sqrt{ngc}/a$。证明：如果$n>11/3$，且摩擦系数

$$\mu>[3(n+1)(3n-11)]^{-1/2},$$

则圆柱能无滑动地滚过管子的顶点。

7.70　均质杆AB，长为$2a$，竖直地放置在桌子的边缘，A点在上，B点与桌子边缘接触。给一小扰动，杆将绕B点向外转动。当沿杆向的反力为零时，杆将离开桌子。证明：当杆离桌时，杆转过的角度

$$\theta_1=\arccos(3/5),$$

并求此时杆子的角速度。如果杆子垂直地打击地面，证明桌子的高度为

$$H=\frac{a}{30}(24\varphi+25\varphi^2+12),$$

其中$\varphi=n\pi-\theta_1$，$n=1,2,\cdots$。

7.71　半径为a，质量为m的均质圆盘可绕通过盘心C且垂直盘面的光滑水平轴自由转动。质量为$m/20$的甲虫A处在盘子的最低点，系统静止。突然，甲虫以不变的相对盘子的速率V沿边缘爬动。证明：

（1）圆盘的初始角速度为$V/(11a)$；

（2）如果在以后的运动中，CA与向下竖直线的夹角为θ，则θ满足方程

$$11a\ddot{\theta}+g\sin\theta=0;$$

（3）如果$V^2>11ag/25$，则甲虫能爬到顶点。

7.72　半径为b的均质空心圆柱体能绕它的中心轴自由转动，中心轴水平安置，且圆柱体以已知的变角速度$\omega(t)$转动。半径为$a(<b)$的均质实心小圆柱体可在大圆柱内无滑动地滚动。两柱的中心轴线平行，且两中心连线与向下的竖直轴夹角为θ，证

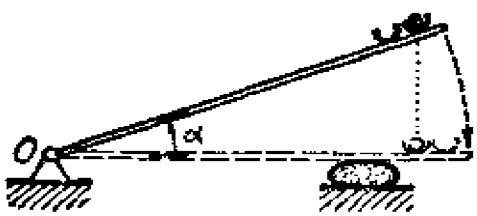
明下列方程成立

$$3(b-a)\ddot{\theta}=b\dot{\omega}-2g\sin\theta.$$

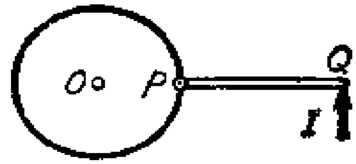
如果 $\dot{\omega}=kg/b=$常量，系统从小圆柱位于最低点的静止状态开始运动，求两个圆柱之间的法向作用力大小R。证明：如果$2k>7$，则$\dot{\theta}$和R单调递增。再证明：对于$k<2$，如果小圆柱能在大圆柱内滚过整周，则下列条件必须被满足：当$\theta=\pi-\arcsin(k/2)$时，$\dot{\theta}>0$；当$\theta=\pi-\arcsin(2k/7)$时，$R>0$。

7.73 均质的实心球放在固定球的顶点。两球之间的摩擦系数$\mu=1/5$，上面的球无初速地下滚。取两球的连心线与向上竖直线的夹角为θ，证明当$\theta=\arccos(340/389)$时，球开始滑动。

7.74 均质板条的一端可绕水平轴O自由转动。开始时用手托住板条使之保持一个不大的倾角α。板的另一端固定有两个很轻的小杯子，外面杯子中有一块小石子（见图）。现放手让板条自由落下，倒在柔软的垫子上。这时将发现小石子不在外面的杯子里，而在里面那个杯子里。解释这个现象。



题 7.74 图



题 7.75 图

7.75 长为$2a$，质量为m的均质杆PQ自由地铰链在一圆盘的边缘P处，圆盘是均质的，半径为a，质量为m，圆心为O。系统静止在光滑水平桌面上，且OPQ在一直线上。今有冲量I作用在Q点，方向垂直PQ。证明：圆盘受冲击后初始角速度的大小为$4I/7ma$。进一步证明：如果杆是刚性地固结在盘缘P点，则受同样打击时，盘的角速度是$12I/17ma$。

7.76 质量为M，半径为a的薄圆柱壳，由于密度不均匀，壳的质心C离壳的对称轴O的距离$OC=ka$，柱壳在不光滑的水

平面上无滑动地滚动。取 OC 与向下竖直线的夹角为 θ，证明：O 点的速率

$$v=\sqrt{ag(\lambda-\nu)/\nu},$$

其中 λ 是常数，$\nu=1-k\cos\theta$。再证明：壳体对平面的法向作用力为

$$Mg\left\{\nu+\frac{1}{2}\lambda\left[\frac{1-k^2}{\nu^2}-1\right]\right\}.$$

7.77 两根均质杆AB和AC，质量都是m，长度都是$2a$，在A点铰接且在同一竖直平面内运动，A点在B，C的上面，每根杆与向下竖直线的夹角都是α。系统从静止开始释放，在自由下落了高度h时，B和C点同时碰撞在无弹性的光滑水平地面上。从能量考虑或其他考虑，说明在碰撞前杆子无转动。证明：在碰撞后的瞬间，每根杆的角速度的大小是

$$3\sqrt{2gh}\cdot\sin\alpha/4a,$$

并求铰A处冲击力的冲量。

7.78 均质杆AB，长为$2a$，质量为m，自由地悬挂在固定点A，同样的杆BC与杆AB在B点铰接。两杆在竖直平面内运动。当ABC竖直向下时，AB杆的角速度为ω，BC杆的角速度为2ω，方向相同。在这瞬间，有反方向的水平冲量I作用在杆BC上的D点，$BD=2ax(x<1)$。

（1）证明：如果打击不改变两杆角速度大小的比值，则$x=1/2$；

（2）写出系统打击前的动能；

（3）如果打击不改变系统的动能，求冲量I的大小。

7.79 均质杆AB，长为$2a$，质量为m，放在光滑水平桌面上，B点被限制在桌面上的光滑水平小槽中运动。开始时杆子静止且平行于小槽。现有水平冲量I作用在杆的A端，方向垂直于AB。证明：冲击后的瞬间杆子的角速度$\omega=3I/2ma$。再证明：在以后的运动中，当杆AB与槽垂直时，杆子的角速度为$3I/ma$，

并求此时杆对槽的作用力。

7.80 半径为a的圆柱体在倾角为α的斜面上向下无滑动地滚动。圆柱轴线始终呈水平。圆柱从静止开始滚过距离l时碰在一根相当粗糙且无弹性的棒上，棒被固定在平行于斜面的水平位置，且与斜面的距离为h。证明：如果

$$[1-ah/(a^2+k^2)]^2\cdot l\sin\alpha>a[1-\sin(\alpha+\beta)],$$

则圆柱体将越过这根棒。上式k是圆柱体对于其对称轴的回转半径，$\sin\beta=1-h/a$，并假定$\alpha+\beta<\pi/2$。

第八章　非惯性参考系中的动力学

在第四章中已指出，牛顿定律只在惯性参考系中适用，然而实际问题往往要求我们在非惯性系中讨论动力学问题。例如，讨论物体相对地球的运动时，在精度要求高，或者时间间隔长的情况下，就必须考虑地球自转的影响，即把地心系作为惯性系，而地球就是非惯性参考系。

处理非惯性参考系中的动力学问题有两种方法：一种方法是先在惯性系中考虑问题，然后应用相对运动的关系（见3-6）进行两种参考系之间坐标、速度和加速度诸量的转换，化成非惯性系中的结论；另一种方法是研究在非惯性参考系中适用的动力学基本方程，从而可以直接在非惯性系中研究动力学问题。第一种方法没有新的内容，本章只讲第二种方法。

8-1　非惯性参考系中质点动力学基本方程

设$[A,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$(以下简写为$[A,\boldsymbol{e}]$)是惯性参考系，而$[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$(简写为$[O,\boldsymbol{i}]$)是非惯性系（图8.1）。

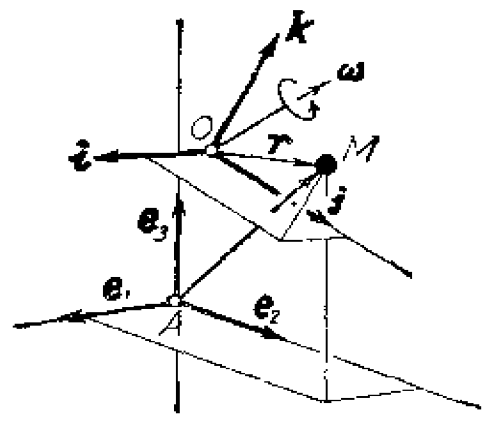


图8.1　惯性系$(A,\boldsymbol{e})$和非惯性系$(O,\boldsymbol{i})$

我们采用复合运动(3-6)中的术语，把惯性系$[A,\boldsymbol{e}]$叫作“定”参考系，而把非惯性系$[O,\boldsymbol{i}]$叫作“动”参考系。质量为m的质点在两个参考系中的加速度分别是“绝对”加速度$\boldsymbol{a}$和“相对”加速度$\boldsymbol{a}_r$。设$\boldsymbol{F}$是作用于质点上的力，在惯性系$[A,\boldsymbol{e}]$中牛顿

定律成立，即有

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}. \tag{8.1}$$

由3-6中式(3.39)$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}_r$ 之间有关系

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_c, \tag{8.2}$$

其中 $\boldsymbol{a}_e$ 是牵连加速度，$\boldsymbol{a}_c$ 是科氏加速度。将式(8.2)代入式(8.1)，可得

$$m\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{F}+(-m\boldsymbol{a}_e)+(-m\boldsymbol{a}_c). \tag{8.3}$$

在非惯性系中，牛顿定律本来是不成立的，为了使它在形式上还可以应用，在真实力 $\boldsymbol{F}$ 以外，设想加两个力：一个等于$(-m\boldsymbol{a}_e)$，称为**牵连惯性力**，用 $\boldsymbol{F}_e$ 表示；另一个等于$(-m\boldsymbol{a}_c)$，称为**科氏惯性力**或**科氏力**，用 $\boldsymbol{F}_c$ 表示。这两个力通称为**惯性力**。

于是，根据式(8.3)得出**非惯性系中质点动力学的基本定律**是：在引进牵连惯性力和科氏惯性力，并将它们与真实力一起作用在质点上后，牛顿定律在形式上仍然成立，即

$$m\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_e+\boldsymbol{F}_c. \tag{8.4}$$

应该注意的是惯性力和以前我们所讲过的力不太一样，它具有虚假的和真实的两重性。它的虚假性表现在它并不像真实力那样是物质与物质之间的相互作用，因而说不上惯性力的施力者是谁，也没有反作用力可言。所以对于惯性力，我们不谈牛顿第三定律。此外真实力的大小、方向并不依赖参考系，而惯性力的大小和方向却与参考系的选择以及参考系的运动有关。它的真实性表现在如果观察者本身处于非惯性参考系中，他可以通过感觉或仪器真实地感受到惯性力的存在，这种力具有与真实力一样的动力学和静力学的效应。在特殊情况下，如果参考系相对于一个惯性系作等速平动，那么式(8.3)中牵连加速度和科氏加速度都等于零，即惯性力等于零。这无非说明式(8.4)又回到了牛顿定律

$$m\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{F}.$$

其实这时两个参考系都是惯性系，所以牛顿定律在这两个参考系中都成立。

现在具体分析牵连惯性力和科氏惯性力。设$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$是质点在$[O,\boldsymbol{i}]$中的向径，牵连加速度（见3-6）是

$$\boldsymbol{a}_e=\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}),$$

其中$\boldsymbol{a}_O$是动坐标原点O的绝对加速度，$\boldsymbol{\omega}$是非惯性参考系$[O,\boldsymbol{i}]$相对于惯性参考系$[A,\boldsymbol{e}]$的角速度，$\boldsymbol{\varepsilon}$是相应的角加速度，它是$\boldsymbol{\omega}$对时间的导数①。由此得出牵连惯性力为

$$\boxed{\boldsymbol{F}_e=-m\boldsymbol{a}_O-m\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}).} \tag{8.5}$$

根据式(3.39)得出科氏惯性力为

$$\boxed{\boldsymbol{F}_c=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r,} \tag{8.6}$$

其中$\boldsymbol{v}_r$是质点在非惯性参考系$[O,\boldsymbol{i}]$中的速度。

在解具体问题时，可以在非惯性系中取各种不同的坐标系，将式(8.4),(8.5)和(8.6)写成分量形式，然后求解微分方程。比如取直角坐标系$[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$，将关系式

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{v}_r=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{a}_r=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_x\boldsymbol{i}+\varepsilon_y\boldsymbol{j}+\varepsilon_z\boldsymbol{k}$$

代入式(8.5)和(8.6)中，就能得出惯性力的具体表达式。注意其中所有导数都是在非惯性参考系中进行的。

在两种特殊情况下，科氏力$\boldsymbol{F}_c$为零。

（一）平动非惯性参考系　此时$\boldsymbol{\omega}=0$，且$\boldsymbol{\varepsilon}=0$，于是$\boldsymbol{F}_c=0$，惯性力只剩下牵连惯性力，即

$$\boldsymbol{F}_e=-m\boldsymbol{a}_O.$$

例8.1　车厢中的单摆。设车厢以等加速度$\boldsymbol{a}$前进，分析悬

---

① 通常我们说一个向量$\boldsymbol{A}$对时间的导数，应该说清楚它是对哪一个参考系的，因为根据式(3.34)，对两个不同参考系的导数相差一项$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}$。但对于向量$\boldsymbol{\omega}$来说，无论是在惯性系$[A,\boldsymbol{e}]$中或在非惯性系$[O,\boldsymbol{i}]$中，导数是相等的，因为$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}=0$。

挂在车厢顶板上的单摆的运动（图8.2）。已知单摆的质量为 m，摆长为 l。

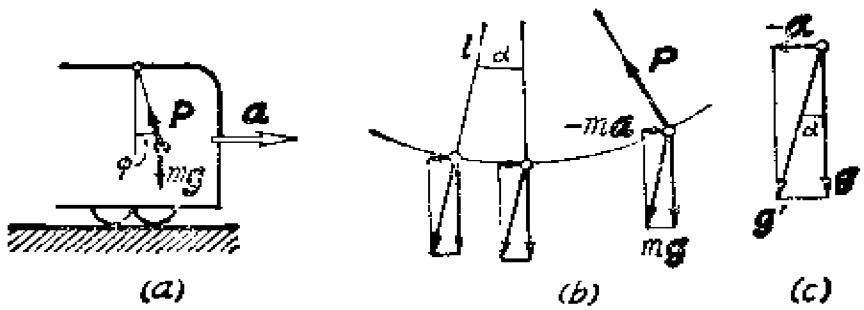


图8.2　车厢中的单摆

解　取车厢为参考系，它相对于惯性参考系（地球）作平动。作用在单摆上的惯性力是 $-m\boldsymbol{a}$，它是一个常向量，与单摆所在的位置无关（图8.2(b)）。因此单摆的运动方程为

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{P}+m\boldsymbol{g}+(-m\boldsymbol{a}),$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 是绳子的张力。

不必再具体求解这个方程，只要把 $\boldsymbol{g}$ 改成 $\boldsymbol{g}'=\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a}$（图8.2(c)），就可以利用以前关于单摆的现成结果。在车厢参考系中，单摆好象在这样一个“重力场”中运动，其重力加速度 $\boldsymbol{g}'$ 的大小为

$$g'=\sqrt{g^2+a^2},$$

方向与向下的竖直线成夹角

$$\alpha=\mathrm{arc\ tg}(a/g).$$

所以单摆将在相对平衡位置 $\varphi=-\alpha$ 处左右摆动，微幅振动的周期是

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}.$$

对于摆幅较大的情况，可以利用4-5中例4.18的结果。▌

（二）在非惯性系中相对静止，即 $\boldsymbol{v}_r=0$　在这种情况不论参考系 $[O,\boldsymbol{i}]$ 自身相对于惯性参考系是怎样运动的，科氏力恒等于

零，只需考虑牵连惯性力。因此质点相对平衡的必要条件成为

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_e=0.$$

例8.2 一桶水绕竖直轴作匀速转动，角速度为 ω，求相对静止时液面的形状。设液面上每一质点 M 受到相邻各点压力的合力 $\boldsymbol{P}$ 与液面相垂直。

解 取水桶为参考系，并取柱坐标 (ρ,φ,z) 如图8.3所示。静止液面上一点 M 的牵连惯性力

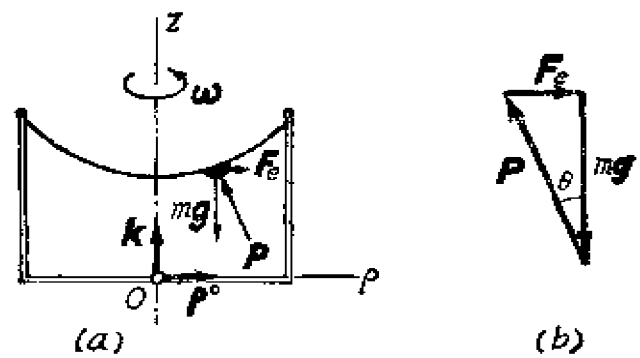


图8.3 液面是旋转抛物面

$$\boldsymbol{F}_e=-m\rho\omega^2\boldsymbol{\rho}^0,$$

这就是通常所说的**离心力**。真实力有两个，重力 $m\boldsymbol{g}$ 和压力的合力 $\boldsymbol{P}$。质点处于平衡状态，所以三个力的向量和应等于零，即

$$m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{F}_e=0.$$

因而有（图8.3(b)）

$$\mathrm{tg}\theta=F_e/mg=\rho\omega^2/g.$$

因为 $\boldsymbol{P}$ 与液面相垂直，故

$$\frac{dz}{d\rho}=\mathrm{tg}\theta,$$

由此得出液面的微分方程为

$$\frac{dz}{d\rho}=\frac{\rho\omega^2}{g}.$$

积分后得

$$z=\frac{\omega^2}{2g}\rho^2+c,$$

即液面是一个旋转抛物面。▌

当非惯性系本身相对惯性空间有转动，并且质点有相对速度

($\boldsymbol{v}_r$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 不平行）时，就必须考虑科氏力的作用。

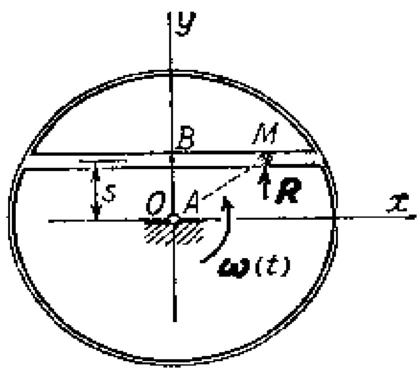


图8.4　求槽中质点的运动

例8.3　水平圆盘绕A轴转动，角速度按已知规律$\omega(t)$变化，盘上有一光滑直槽，离A的距离为s。分析槽中小球M的运动和槽对小球的横向作用力。

解　取固连在圆盘上的坐标系$Oxyz$如图8.4所示。牵连加速度为

$$\boldsymbol{a}_e=(-s\varepsilon-\omega^2x)\boldsymbol{i}+(\varepsilon x-\omega^2 s)\boldsymbol{j},$$

式中 $\varepsilon=\dot{\omega}(t)$。因此牵连惯性力为

$$\boldsymbol{F}_e=(ms\varepsilon+m\omega^2x)\boldsymbol{i}+(-m\varepsilon x+m\omega^2 s)\boldsymbol{j}.$$

科氏力为

$$\boldsymbol{F}_c=-2m(\omega\boldsymbol{k})\times(\dot{x}\boldsymbol{i})=-2m\omega\dot{x}\boldsymbol{j}.$$

设槽对质点的横向作用力为$\boldsymbol{R}=R\boldsymbol{j}$，将运动方程(8.4)在$x,y$轴方向分解得

$$\begin{cases} m\ddot{x}=m\varepsilon s+m\omega^2x, & (1)\\ 0=-m\varepsilon x+m\omega^2 s-2m\omega\dot{x}+R. & (2)\end{cases}$$

式(1)给出

$$\ddot{x}-\omega^2x=\varepsilon s,$$

这里ω,ε是时间的已知函数。如果给定了初条件$x(0)$和$\dot{x}(0)$，就能求出$x(t)$，然后代入式(2)，求出约束力

$$R=m\varepsilon x-m\omega^2 s+2m\omega\dot{x}.$$

考虑$\omega=$常量的特殊情况，则$\varepsilon=0$。设初条件为$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=v_0$，可得

$$x=x_0\operatorname{ch}\omega t+\frac{v_0}{\omega}\operatorname{sh}\omega t,$$

$$R = -m\omega^2 s + 2m\omega^2 x_0 \mathrm{sh}\,\omega t + 2mv_0\omega \mathrm{ch}\,\omega t.$$

从理论上讲，如果 $x_0=0, v_0=0$，那么 $x(t)\equiv 0$ 就是解，即质点停留在槽的中点不动，它是一种相对平衡状态。但这种平衡位置是不稳定的，因为只要受到极微小的干扰，就有 $x_0\neq 0$ 或 $v_0\neq 0$，于是当 $t\to\infty$ 时，质点将无限地远离这个平衡位置。▌

例8.4 旋转的单摆（图8.5）。单摆由长为 l 的轻刚杆和质量为 m 的质点组成，刚杆可在平面 Oxy 内绕水平轴 Oz 自由地转动，而 Oz 轴自身又绕竖直轴 Ox 的反方向以匀角速 ω 转动，分析单摆的相对平衡位置。

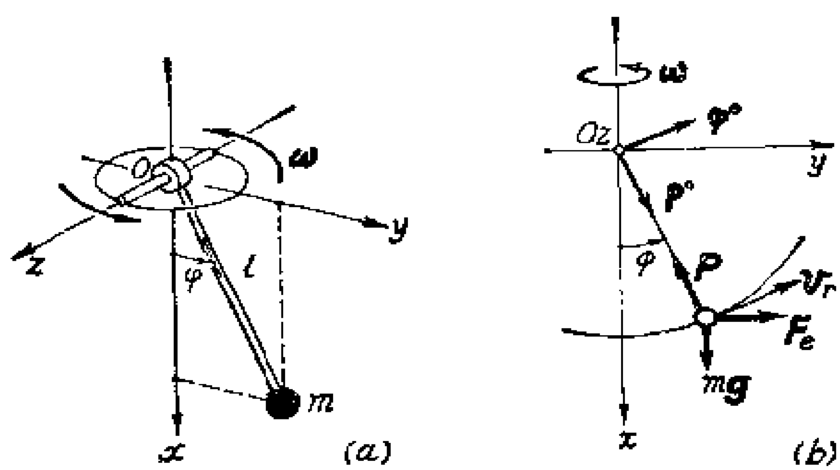


图8.5 旋转的单摆

解 取旋转着的 $Oxyz$ 为参考系，在此系中单摆的运动由一个量 φ 描述。相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 在 Oxy 平面内，所以科氏力 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$ 在这平面内投影为零。在此平面内列写运动微分方程时只需考虑重力 $mg\boldsymbol{i}$，牵连惯性力 $\boldsymbol{F}_e$ 和刚杆的约束力 $\boldsymbol{P}$，即

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{P} + mg\boldsymbol{i} + \boldsymbol{F}_e.$$

取切向投影便得到

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi + ml\omega^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

或

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = \omega^2\sin\varphi\cos\varphi. \qquad (1)$$

如果知道了初始条件，就可进一步求出这个非线性微分方程的解。

设 $\varphi=\varphi^*$ 是相对平衡位置，代入式（1）得

$$\frac{g}{l}\sin\varphi^*=\omega^2\sin\varphi^*\cos\varphi^*. \qquad (2)$$

由此得出两个解：一个是 $\sin\varphi^*=0$，即 $\varphi^*=0$ 或 $\varphi^*=\pi$；另一个是 $\cos\varphi^*=g/l\omega^2$，当 $\omega\geqslant\sqrt{g/l}$ 时 φ^* 有解。这个结果说明，当转速较小时有两个平衡位置，对应于质点在最低或最高位置；当转速较大时，有四个平衡位置（如图8.6所示，图中只画出了三个平衡位置）。下面的例8.5将进一步说明图中实线代表稳定的平衡位置，而虚线代表不稳定的平衡位置。只有稳定的平衡位置才是物理上可以实现的。所以可实现的相对平衡位置应写成

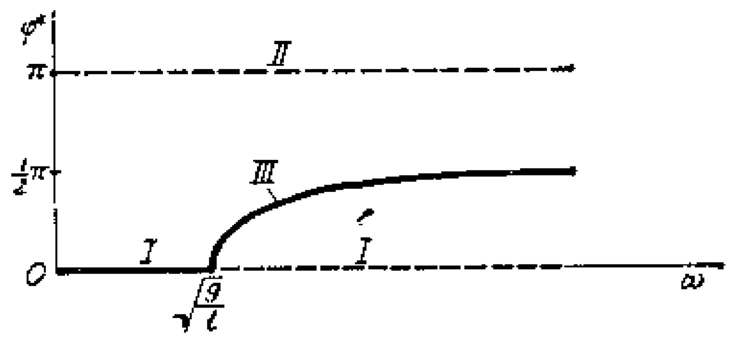


图8.6　稳定和不稳定的平衡位置

$$\varphi^*=\begin{cases}0, & \omega\leqslant\sqrt{g/l},\\ \pm\arccos(g/l\omega^2), & \omega>\sqrt{g/l}.\end{cases}$$ ▌

＊＊＊　将转速 ω 十分缓慢地（准静态地）由零开始逐渐增加，上例中摆的偏角 φ 将怎样变化？＊＊＊

例8.5　讨论例8.4所述平衡位置的稳定性。求摆在稳定平衡位置附近的微振动周期。

解　上例中运动方程(1)式可写成为

$$\ddot{\varphi}+V'(\varphi)=0,$$

其中

$$V'(\varphi)=\frac{g}{l}\sin\varphi-\frac{1}{2}\omega^2\sin 2\varphi.$$

根据4-6中的结果，平衡位置 $\varphi=\varphi^*$ 的稳定性由 $V''(\varphi^*)$ 的正负号

来判定，现在

$$V''(\varphi^*)=\frac{g}{l}\cos\varphi^*-\omega^2\cos2\varphi^*,$$

而 $\varphi^*=0,\pi$ 和 $\pm\arccos(g/l\omega^2)$。

先看 $\varphi^*=0$，代入得 $V''(0)=g/l-\omega^2$。所以平衡位置 $\varphi^*=0$ 在 $\omega<\sqrt{g/l}$ 是稳定的，在这个位置附近，振动周期为

$$T=2\pi\Big/\sqrt{\frac{g}{l}-\omega^2}.$$

如果 $\omega>\sqrt{g/l}$，则 $f(0)<0$，对应的 $\varphi^*=0$ 是不稳定的平衡位置。

次看 $\varphi^*=\pi$，代入得

$$V''(\pi)=-\frac{g}{l}-\omega^2<0.$$

因此不论 ω 是什么值，对应的平衡位置都是不稳定的。

再看当 $\omega^2>g/l$ 时，$\varphi^*=\pm\arccos(g/l\omega^2)$，代入得

$$V''(\varphi^*)=\omega^2\sin^2\varphi^*>0,$$

所以它对应稳定的平衡位置，微振动周期是

$$T=\frac{2\pi}{\omega\sin\varphi^*}.$$

旋转单摆的相对平衡位置与微幅振动周期随 ω 的变化关系如图8.7、图8.8(见下页)所示，图中 $\omega_0=\sqrt{g/l}$，$T_0=2\pi/\omega_0$。▌

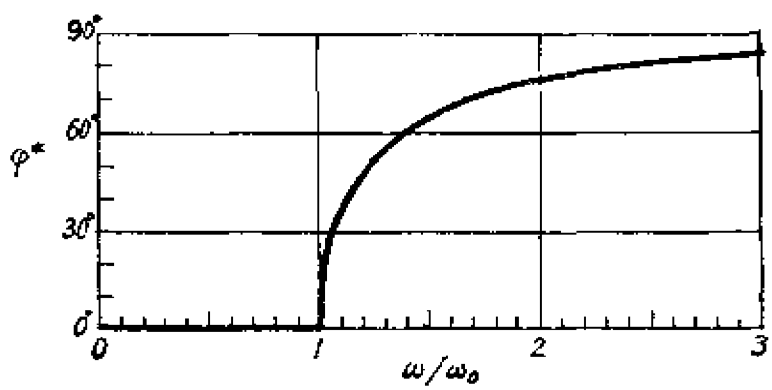


图8.7 平衡位置 φ^* 与转速 ω 的关系

8-2 非惯性参考系中质点系动力学基本定理

在第五、第六、第七章中，我们从牛顿定律出发，导出了质

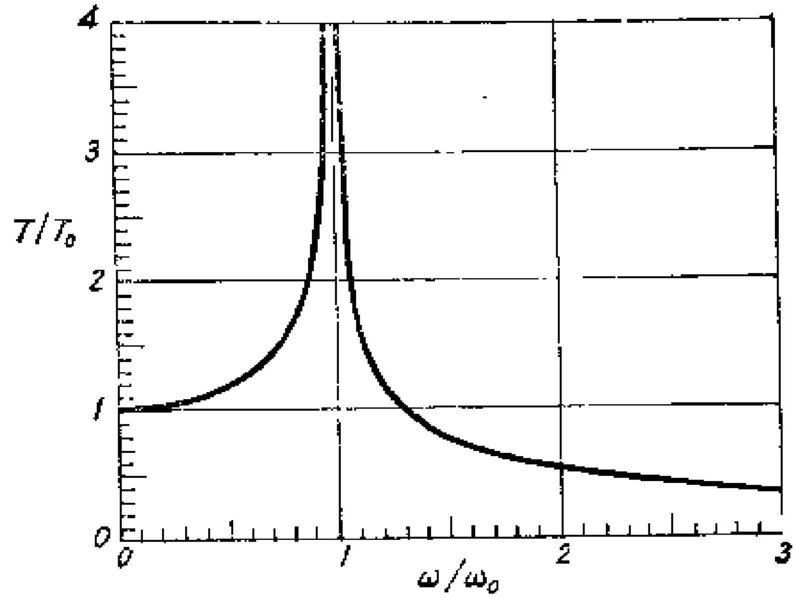


图8.8 微幅振动周期 T 与转速 ω 的关系

点系的动量定理、动量矩定理和动能定理，它们当然只在惯性参考系中才成立。至于在非惯性参考系中，只要把每一个质点的惯性力附加到各质点上，就可以相应地推导出在非惯性系中适用的动力学基本定理。

设 $[O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$ 是非惯性参考系，在决定惯性力时，我们需要知道它相对惯性系的运动量即 O 点的加速度 $\boldsymbol{a}_O$，以及角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角加速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$。考虑由 n 个质点组成的质点系，质量分别为 m_i，向径分别为 $\boldsymbol{r}_i (i=1,2,\cdots,n)$。

每一质点的牵连惯性力为

$$\boldsymbol{F}_e^{(i)} = -m_i[\boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)],$$

科氏力为

$$\boldsymbol{F}_c^{(i)} = -2m_i\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_i.$$

所有这些力 $\boldsymbol{F}_e^{(i)}, \boldsymbol{F}_c^{(i)} (i=1,2,\cdots,n)$ 组成了惯性力系。

先求惯性力系的主向量：

$$\sum\boldsymbol{F}_e = -M\boldsymbol{a}_O - \boldsymbol{\varepsilon}\times(\sum m\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\sum m\boldsymbol{r})].$$

设 $\boldsymbol{r}_C$ 是质点系质心的向径，即

$$\sum m\boldsymbol{r}=M\boldsymbol{r}_C.$$

因此有

$$\sum \boldsymbol{F}_e=-M[\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_C)].$$

同理有

$$\sum \boldsymbol{F}_C=-2\boldsymbol{\omega}\times(\sum m\boldsymbol{v})=-2\boldsymbol{\omega}\times M\boldsymbol{v}_C.$$

这两个式子表明，假设质点系的质量全部集中在质心，那么质点系惯性力的主向量等于质心的惯性力。又因为

$$\sum m\boldsymbol{a}_r=\frac{d}{dt}(\sum m\boldsymbol{v})=\frac{d}{dt}(M\boldsymbol{v}_C),$$

所以

$$\frac{d}{dt}(M\boldsymbol{v}_C)=\boldsymbol{R}-M[\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_C)]$$
$$-2\boldsymbol{\omega}\times(M\boldsymbol{v}_C). \qquad (8.7)$$

于是质点系动量定理为：在非惯性系中质点系动量对时间的导数（相对导数）等于所有外力的主向量 $\boldsymbol{R}$ 与质心的惯性力之向量和。

下面再求惯性力系对 O 点的主矩：

$$\sum_{i=1}^{n}[\boldsymbol{r}_i\times(\boldsymbol{F}_e^{(i)}+\boldsymbol{F}_C^{(i)})].$$

把 $\boldsymbol{F}_e^{(i)}$ 和 $\boldsymbol{F}_C^{(i)}$ 的具体表达式代入，所得结果在一般情况下简化不了。比如其中将涉及以下各项：

$$\sum[m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r})];$$

$$\sum\{m\boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})]\};$$

$$\sum[m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})],$$

有关的向量如图 8.9 所示。因此对于动量矩定理，我们只能给出一个一般性的说法：在非惯性系中质点系动量矩的导数等于所有外力的主矩和惯性力系的主矩之向量和。

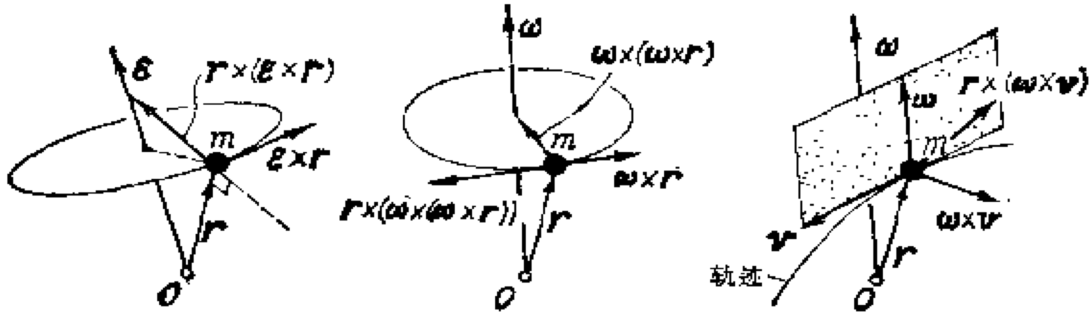


图8.9　惯性力矩表达式中的有关向量

当非惯性系的运动是平动时，即 $\boldsymbol{\omega}=0$，$\boldsymbol{\varepsilon}=0$，则上述结果可以被简化。此时科氏力为零，惯性力只剩牵连惯性力，其主矩是

$$\sum(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_e)=-\sum(m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}_O)=\boldsymbol{r}_C\times(-M\boldsymbol{a}_O).$$

它同样可以解释为质心的惯性力（$-M\boldsymbol{a}_O$）对 O 点的矩。因此在平动非惯性系中，质点系动量矩对时间的导数等于两个向量之和：一个是外力对 O 点的主矩；另一个是质心惯性力对 O 点的矩。这个结果在第六章中已经导出过，它就是式(6.10)。如果将 O 点取在质心 C，即对于质心平动参考系来说，就是式(6.11)所表示的对质心的动量矩定理。

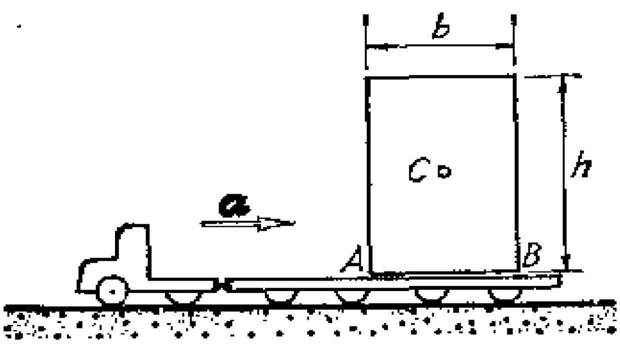


图8.10　刹车时箱子怎么动？

例8.6　平板车上放着尺寸为 $b\times h$ 的箱子（假设为均匀长方体），箱子重 mg，箱子与车板之间有足够的摩擦以防止滑动。分析平板车急刹车时箱子的运动和箱子所受的反力（见图8.10）。

解　设平板车刹车时的加速度大小为 a，方向向后。以车身为参考系，则惯性力只有牵连惯性力，它们的合力大小为 ma，

方向向前，作用点在质心C处。

当$a<gb/h$时，惯性力与重力的合力$\boldsymbol{R}$和箱子底面AB的交点落在A与B之间（见图8.11)，箱子保持相对静止。此时车身对箱子的摩擦力$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，而法向反作用力为$\boldsymbol{N}=m\boldsymbol{g}$。

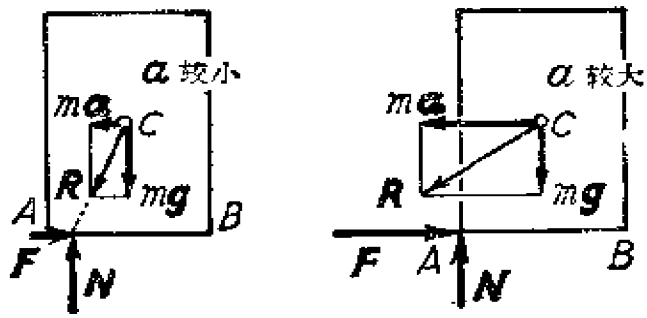


图8.11 受力分析

当$a>gb/h$时，合力$\boldsymbol{R}$与AB的交点将落在AB之外，箱子将绕水平轴A转动。开始转动时的角加速度ε由刚体定轴转动的动量矩定理决定：

$$\frac{1}{3}m(b^2+h^2)\varepsilon=ma\cdot\frac{h}{2}-mg\cdot\frac{b}{2},$$

即

$$\varepsilon=\frac{3}{2}\frac{(ah-gb)}{b^2+h^2}.$$

刚开始转动时，转动角速度为零，所以，此时质心加速度的水平分量的大小为$h\varepsilon/2$，方向指向车前；竖直分量的大小为$b\varepsilon/2$，方向向上。根据质心的动量定理，可求得此瞬时车身对箱子的反力为：

$$\text{法向力}\quad N=mg+mb\varepsilon/2,$$

$$\text{摩擦力}\quad F=ma-mh\varepsilon/2. \quad \blacksquare$$

例8.7 长l，质量为M的均质细杆OA可在Oxy平面内绕水平轴Oz自由摆动，而Oz轴本身绕竖直轴Ox的反向作匀角速ω转动(图8.12)。求摆的微振动周期。

解 在非惯性参考系中，各质点的离心力即牵连惯性力都是平行于Oy轴的，其分布如图8.12(b)所示。各质点的科氏力将平行于Oz轴（图中未画出）。

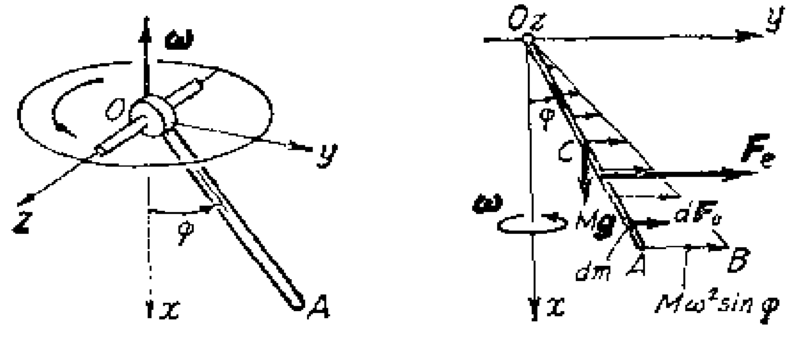


图8.12 旋转轴上的摆

设质量元 dm 离 O 点的距离为 ξ，于是有

$$dm=\frac{M}{l}d\xi,$$

它的牵连惯性力的大小为

$$dF_e=(\xi\sin\varphi)\omega^2 dm=\frac{M}{l}\omega^2\xi\sin\varphi d\xi.$$

惯性力对 Oz 轴的矩为

$$L_z=\int\xi\cos\varphi dF_e=\int_0^l\frac{M}{l}\omega^2\xi^2\sin\varphi\cos\varphi d\xi$$

$$=\frac{1}{3}Ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

在非惯性系 $Oxyz$ 中，对 Oz 轴用动量矩定理，得

$$\frac{1}{3}Ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{1}{3}Ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi-Mg\cdot\frac{1}{2}l\sin\varphi,$$

简化后成为

$$\ddot{\varphi}+\frac{3g}{2l}\sin\varphi=\omega^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

以下的讨论就和上一节例8.4和例8.5完全相同了，只需把以前式中的 l 换成相应的折合长度 $2l/3$。（一些结论在下面 例 8.8 中给出。）▌

＊＊＊ 为什么在解题过程中不出现科氏力矩的作用？在什么

情况下必须加以考虑？ * * *

最后，我们来讨论惯性力系的功。科氏力 $\boldsymbol{F}_c^{(i)}$ 的元功为 $\boldsymbol{F}_c^{(i)}\cdot\boldsymbol{v}_i dt$，因为 $\boldsymbol{F}_c^{(i)}$ 与 $\boldsymbol{v}_i$ 垂直，所以此元功必为零，即科氏力不作功。因此在非惯性系中应用动能定理时，只需考虑牵连惯性力所作的功。这样**动能定理**就成为：在非惯性参考系中质点系动能的变化量等于外力、内力以及牵连惯性力的功。

现在考虑仅有匀速转动的非惯性系。为方便计，把转动轴取作 Oz 轴，这时轴上各点的加速度等于零①，于是第 i 个质点的牵连惯性力即离心力为

$$\boldsymbol{F}_e^{(i)}=m_i\omega^2(X_i\boldsymbol{i}+Y_i\boldsymbol{j}),$$

其中 X_i, Y_i 是质点的坐标，容易看出它是有势力，势能为(图8.13)

$$V_{ei}(X,Y,Z)=-\frac{m_i\omega^2}{2}(X_i^2+Y_i^2).$$

整个质点系的离心力势能是

$$V_e=-\frac{\omega^2}{2}\sum m(X^2+Y^2)$$

$$=-\frac{\omega^2}{2}\sum(m\rho^2).$$

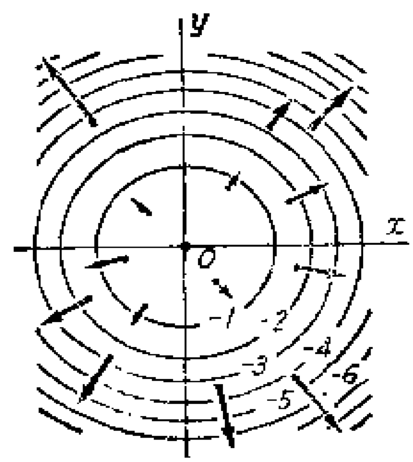


图8.13 离心力及离心力势能

如果所考虑的质点系是一个刚体，那么 $\sum(m\rho^2)$ 就是它绕 Oz 轴的转动惯量 J_z，所以有

$$V_e=-\frac{1}{2}J_z\omega^2.$$

在匀速转动参考系中，如果真实力（包括内力和外力）是有势力，势能为 V，则机械能量守恒定律可以写成

$$\frac{1}{2}\sum(mv^2)+V_e+V=\text{常量}. \qquad (8.8)$$

① 如果转动轴 Oz 本身在惯性参考系中作匀速平动，那么由伽利略相对性原理，以下的讨论仍然成立，比如轮子以匀速沿直线滚动时就是这种情况。

＊＊＊　匀加速平动非惯性参考系中惯性力有没有势？试以上节例8.1（图8.2）说明之。＊＊＊

例8.8　用能量法解例8.7。

解　杆对转轴 Ox 的转动惯量是

$$J_x=\int_0^l \frac{M}{l}(\xi\sin\varphi)^2 d\xi=\frac{1}{3}Ml^2\sin^2\varphi.$$

离心势能为

$$V_e=-\frac{1}{2}J_x\omega^2=-\frac{1}{6}Ml^2\omega^2\sin^2\varphi.$$

重力势能为

$$V=-Mg\cdot\frac{l}{2}\cos\varphi.$$

系统的动能为 $(1/2)J_z\dot{\varphi}^2$，而 $J_z=(1/3)Ml^2$。根据能量守恒定律式(8.8)得

$$\frac{1}{6}Ml^2\dot{\varphi}^2-\frac{1}{6}Ml^2\omega^2\sin^2\varphi-\frac{1}{2}Mgl\cos\varphi=E_0(\text{常量}).$$

系统的总势能 $U=V_e+V$，其曲线如图8.14所示。系统的平

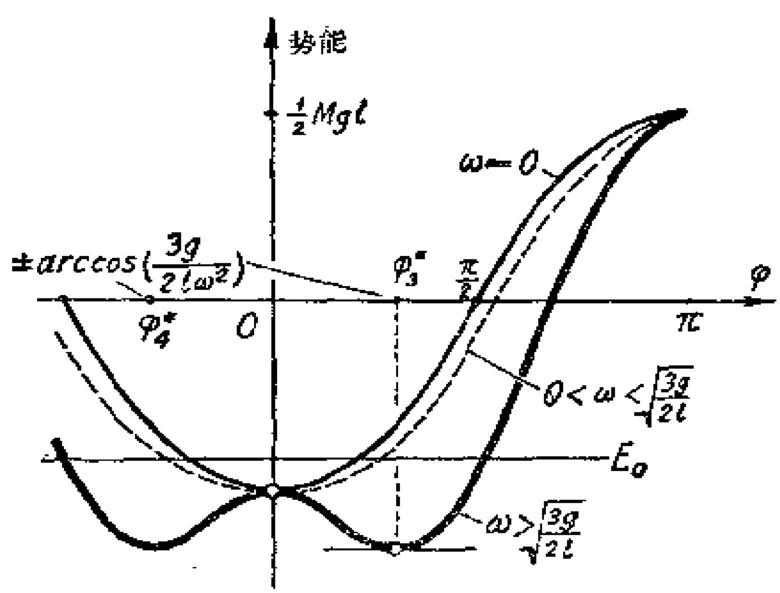


图8.14　非惯性系中的势能曲线

衡位置由 $U'(\varphi)=0$ 确定，即

$$[2l\omega^2\cos\varphi-3g]\sin\varphi=0.$$

所以，在 $-\pi<\varphi\leqslant+\pi$ 之间可能有四个根。

当 $\omega>\sqrt{3g/2l}$ 时，$U'=0$ 确实有四个根，其中 $\varphi_1^*=0$ 和 $\varphi_2^*=\pi$ 所对应的 U'' 值小于零，对应于不稳定的平衡位置；另外两根是 φ_3^*,φ_4^*，它们分别等于 $\pm\arccos(3g/2l\omega^2)$，对应于稳定的平衡位置。杆子在稳定平衡位置附近作微振动的周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J_z}{U''(\varphi^*)}}=\frac{2\pi}{\omega}\Bigg/\sqrt{1-\left(\frac{3g}{2l\omega^2}\right)^2}.$$

当初始能量 E_0 给得足够大时(见图8.14)，根就能越过 φ_3^* 与 φ_4^* 作周期性的摆动。有趣的是在非惯性系中看，杆的动能最大之处，并不在杆的重心最低的位置（即 $\varphi=0$）处，这与我们熟悉的复摆不一样。

当 $\omega<\sqrt{3g/2l}$ 时，$U'=0$ 只有两个根，$\varphi_1^*=0$ 对应 U 的极小值，所以是稳定的平衡位置，在它附近的微振动周期为

$$T=2\pi\Bigg/\sqrt{\frac{3g}{2l}-\omega^2}.$$

当 $\omega=0$ 时就相当于以前讨论过的复摆。▌

例8.9 大地基准面。设地球是一个球对称的刚体，它的密度 μ 只和它到地心的距离有关，即 $\mu=\mu(r)$，引力势能是 r 的函数，即

$$V_{引}=-\frac{\gamma Mm}{r}.$$

设 Oz 轴是地球的自转轴，于是单位质量的离心力势能是

$$V_e=-\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2).$$

因此，在地球这个非惯性参考系中，位于地球以外单位质量的势能为

$$U=-\frac{\gamma M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2).$$

所谓“大地基准面”或者通常所说的“水平面”就是一个等势面，它的方程是

$$\frac{\gamma M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)=常量.$$

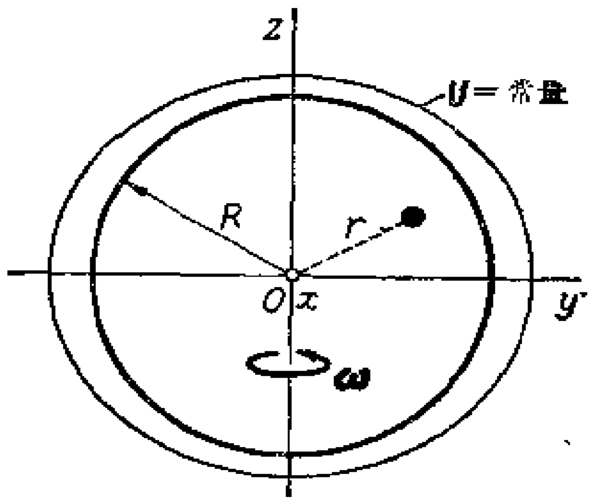


图8.15 大地基准面$U=$常量

这个曲面是一个扁形的迴转面（图8.15）。

实际上，地球不是严格的圆球，密度分布也不是严格球对称的，因而引力势能的一般形式是

$$V_{引}=-\gamma\iiint\frac{\mu(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}},$$

其中（x，y，z）是地面上任意一点的坐标。于是大地基准面的形状将是等势面

$$U=-\gamma\iiint\frac{\mu(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

$$-\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)=常量.$$

为了确定地球的形状，通常将上式中积分式按球函数展开，

然后逐次逼近。比如，大地基准面的第一次近似是一个旋转椭球面。在更精密的大地测量和应用地球科学中，需要有更高的近似，如三轴椭球（赤道不是圆），甚至考虑南北两半球不对称（北极比较尖些，南极比较平坦些，有些象梨子的形状）。有关这类地球形状的研究，近二十年以来都是利用人造卫星轨道数据反推求得的。这些研究与空间导航，重力勘探等都有密切的关系。▎

例8.10 半径为R的光滑圆环，在水平面内绕它边上一固定点O转动，角速度ω为常量，圆环上穿有一质量为m的小珠子(图8.16)。求小珠子的相对运动微分方程。

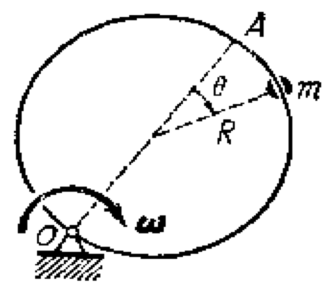


图8.16 机械能守恒吗？

解 取圆环为参考系。设小珠离直径OA的偏角为θ，于是小珠的动能为$mR^2\dot{\theta}^2/2$。重力势能为零，约束力的功等于零，而离心势能为

$$V_e = -\frac{\omega^2}{2}\overline{OM}^2 \cdot m = -mR^2\omega^2(1+\cos\theta).$$

在非惯性参考系中用机械能守恒定理，得

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mR^2\omega^2(1+\cos\theta) = E_0(\text{常量}). \qquad (1)$$

将上式对t求一次导数就得到小珠相对圆环的运动微分方程

$$\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0.$$

由此可见，小珠子在相对平衡位置A点附近振动，情况与单摆完全类似。

值得注意的是，如果回到惯性参考系中考虑问题，机械能并不守恒。因为在惯性参考系中，小珠子的动能是①

---

① 参见7-3中例7.10。在这里$T_0 = mR^2\omega^2(1+\cos\theta)$，$T_1 = mR^2\omega\dot{\theta}(1+\cos\theta)$，$T_2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$。

$$T=T_0+T_1+T_2$$
$$=\frac{m}{2}R^2[\dot{\theta}^2+2m(\dot{\theta}+\omega)(1+\cos\theta)].$$

因为势能V是零，所以总机械能为
$$E=T+V=T_0+T_1+T_2.$$
对照非惯性参考系中机械能守恒方程（1），可知有$T_2-T_0=E_0$，代入上式得
$$E=E_0+T_1+2T_0$$
$$=E_0+mR^2\omega(\dot{\theta}+2\omega)(1+\cos\theta).$$
它显然不是常量，所以在运动过程中机械能是不守恒的。

造成在两种参考系中机械能守恒或不守恒的原因是约束力是否作功。虽然圆环对小球的约束是光滑的，但因为圆环本身在运动①，所以在惯性系中看，约束力作功并不为零，因而机械能不守恒。此例说明我们在解题过程中，在不同参考系中，是否能够应用机械能守恒定理，必须作具体分析。▌

8-3 相对于地球的运动

取地心参考系作为惯性系，则地球在这个参考系中几乎是作匀速定轴转动，角速度大小为
$$\omega=\frac{2\pi}{86164}\ 1/秒=7.29\times10^{-5}\ 1/秒.$$
尽管ω的数值很小，但是在某些问题中必须考虑它的影响，因此地球本身是一个非惯性参考系。现在我们讨论在这个非惯性参考系中的几个重要结果。

（一）铅垂线不通过地球中心 在地面上用细线AB挂一质量为m的小球（图8.17），当小球处于平衡状态时，通常我们称AB线为铅垂线或竖直线。实际上AB线并不经过地心O点，而

① 约束本身随时间变化的情况，叫做不定常约束。关于在不定常约束下能量关系的一般结论将在第十章中进行讨论。

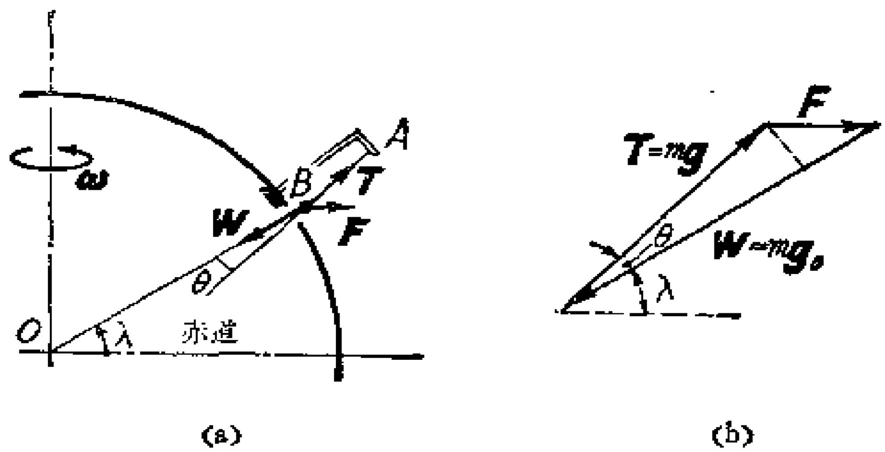


图8.17　铅垂线的偏差

是与 BO线有一个夹角 θ。在地心参考系中，质点受到的力有：地心引力，它的大小为 $W=mg_0$，方向指向地心；离心惯性力，其大小为 $F=m(R\cos\lambda)\omega^2$，方向与地球转动轴垂直，指向外，其中 λ 为当地纬度；线中张力 $\boldsymbol{T}$。当小球处于平衡状态时，上述三个力构成平衡力系，即

$$\boldsymbol{T}+m\boldsymbol{g}_0+\boldsymbol{F}=0。$$

将地心引力和离心惯性力之和写成 $m\boldsymbol{g}$，即

$$m\boldsymbol{g}=m\boldsymbol{g}_0+\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{T},$$

其中 $\boldsymbol{g}$ 称为**表观重力加速度**。意思是说，由于地球自转的影响，我们在地球表面附近观察或测量到的重力加速度是 $\boldsymbol{g}$ 而不是 $\boldsymbol{g}_0$。

由于 $F\ll mg_0$（或 $R\omega^2\ll g_0$），在力三角形（图 8.17（b））中作出一垂直于W的虚线段，舍去 $R\omega^2/g_0$ 的高阶小量，近似地得出

$$\theta=\frac{F\sin\lambda}{W}=\frac{R\omega^2}{g_0}\sin\lambda\cos\lambda,$$

$$m(g_0-g)=W-\boldsymbol{T}=F\cos\lambda=mR\omega^2\cos^2\lambda。$$

将 $R=6370$公里，$g_0=9.82$米/秒^2 以及 ω 的数值代入上式，得

$$\theta\approx\frac{1}{290}\sin\lambda\cos\lambda\ ,$$

$$1-\frac{g_0}{g}\approx\frac{1}{290}\cos^2\lambda.$$

由此可见，地心纬度与地理纬度之间的偏差角 θ 在两极($\lambda=90^\circ$) 以及在赤道 ($\lambda=0$) 处为零，在纬度 $\lambda=45^\circ$ 处最大，约为1/580弧度，即5.9′。表观重力加速度在两极处与 g_0 一致，在赤道处与 g_0 相差最大，约为0.3%。北京的纬度约为 $\lambda=40^\circ$，因此有 $\theta=5.8'$，$g=980.2$ 厘米/秒^2。

* * *　说明铅垂线与上节 例8.9 所说的大地基准面的关系。在同一基准面上，一个质点在赤道处的重量是否要比高纬度处的重量轻一些？这个差别能否用天平（砝码）称出来？能否用弹簧秤称出来？ * * *

（二）自由落体的东偏　物体在地球表面的高度 h 处自由落下（图8.18），由于地球自转的影响，落体并不沿铅垂线下降，落地点将比垂足O点稍微偏东一些。现在我们计算这个偏东量 Δ。

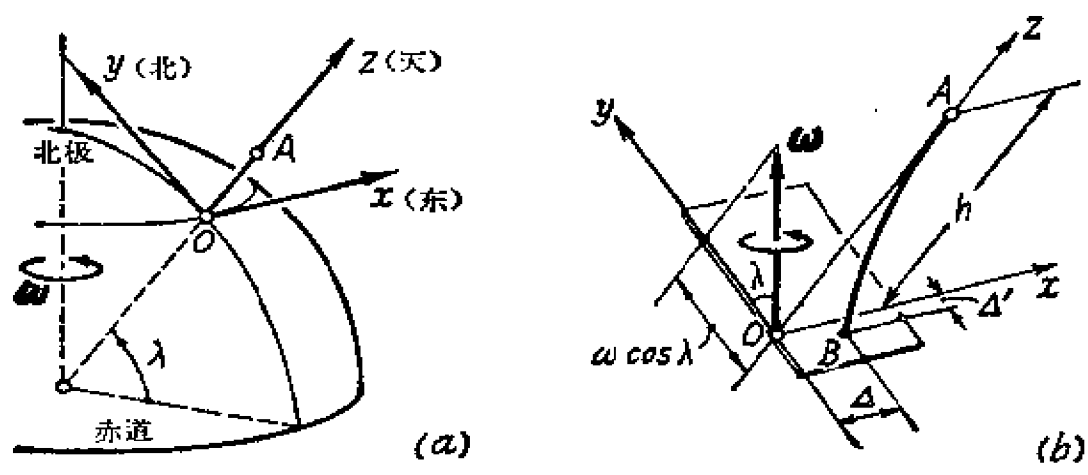


图8.18　落体偏东

取地面上的点O为原点，当地的东北天方向为直角坐标系 $[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 的方向。设当地的纬度为 λ（北半球），因此地球自转角速度向量可表示为 $\boldsymbol{\omega}=\omega\cos\lambda\boldsymbol{j}+\omega\sin\lambda\boldsymbol{k}$。质点的运动方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=-mg\boldsymbol{k}-2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}.$$

在这里我们应该注意等号右边第一项是表观重力，它是地心引力与离心惯性力的向量和，$\boldsymbol{k}$ 沿表观重力的反方向。

取 x，y，z 三个分量方程，并消去 m 以后得到

$$\begin{cases}\ddot{x}=2\omega(\dot{y}\sin\lambda-\dot{z}\cos\lambda),\\ \ddot{y}=-2\omega(\dot{x}\sin\lambda),\\ \ddot{z}=-g+2\omega(\dot{x}\cos\lambda).\end{cases}\tag{8.9}$$

自由落体的初条件是 $x(0)=0$，$y(0)=0$，$z(0)=h$；$\dot{x}(0)=\dot{y}(0)=\dot{z}(0)=0$。

求解这组方程，其解必定与 ω 有关。因为 ω 是小量，因此可按 ω 展成幂级数，其形式如下：

$$\begin{cases}x(t)=x_0(t)+x_1(t)\omega+x_2(t)\omega^2+\cdots,\\ y(t)=y_0(t)+y_1(t)\omega+y_2(t)\omega^2+\cdots,\\ z(t)=z_0(t)+z_1(t)\omega+z_2(t)\omega^2+\cdots.\end{cases}$$

略去阶次高于 ω 的小量，得到近似解为

$$\begin{cases}x(t)=x_0(t)+x_1(t)\omega,\\ y(t)=y_0(t)+y_1(t)\omega,\\ z(t)=z_0(t)+z_1(t)\omega.\end{cases}$$

将上式代入式（8.9）和初条件中，比较 ω 的零次项及一次项系数，得出两组微分方程初值问题如下：

$x_0(t)$，$y_0(t)$，$z_0(t)$ 满足微分方程

$$\ddot{x}_0=0,\qquad \ddot{y}_0=0,\qquad \ddot{z}_0=-g,$$

初条件为

$$x_0(0)=0,\quad y_0(0)=0,\quad z_0(0)=h;$$

$$\dot{x}_0(0)=0,\quad \dot{y}_0(0)=0,\quad \dot{z}_0(0)=0.$$

这刚好就是假定 $\omega=0$ 时的微分方程及初条件(相当于不考虑地球的自转),解为

$$x_0(t)=0, \quad y_0(t)=0, \quad z_0(t)=h-\frac{1}{2}gt^2.$$

这就是自由落体的第零次近似解。

另外 $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ 满足微分方程

$$\begin{cases} \ddot{x}_1=2\dot{y}_0\sin\lambda-2\dot{z}_0\cos\lambda, \\ \ddot{y}_1=-2\dot{x}_0\sin\lambda, \\ \ddot{z}_1=2\dot{x}_0\cos\lambda. \end{cases}$$

初条件为

$$x_1(0)=y_1(0)=z_1(0)=0;$$

$$\dot{x}_1(0)=\dot{y}_1(0)=\dot{z}_1(0)=0.$$

将零次近似解代入以后便可解得

$$x_1(t)=\frac{1}{3}gt^3\cos\lambda; \quad y_1(t)=0; \quad z_1(t)=0.$$

于是可以得到自由落体的一次近似解为

$$\begin{cases} x(t)=x_0+x_1\omega=\frac{1}{3}g\omega t^3\cos\lambda, \\ y(t)=y_0+y_1\omega=0, \\ z(t)=z_0+z_1\omega=h-\frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

由第三式可以解得物体落到地面($z=0$)所需的时间为

$$t=(2h/g)^{1/2},$$

代入第一式就可以求出物体落地时向东的偏差量为

$$\Delta=\frac{1}{3}g\omega\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}\cos\lambda. \tag{8.10}$$

可以类似地再取 ω^2 项继续算下去,得出物体落地时不仅东偏,而且还有南偏。

曾经有过不少次实验证实了落体东偏，例如1912年哈根(Hagen)在罗马（纬度$\lambda=41°54'$）从高$h=22.96$米处作自由落体实测试验，共计实测66次，平均东偏量为0.899 ± 0.027毫米，而按式(8.10)算出的理论值为0.899毫米，结果是相当吻合的。

初学者可能会疑惑，地球是由西往东转的，似乎物体落地时应该偏西才合理一些，为什么反而偏东呢？这可以在地心参考系中得到明显的解释。

设同一铅垂线上有两点O和A，物体自A点自由下落。所谓自由下落就是相对地面无初速地下落，而实际上由于地球的自转，它在地心惯性系中看是有初速度的，这个初速度就是牵连速度，指向东（图8.19），而且在高处A点比在低处O点要大，即$v_A>v_0$。经过一段下落时间，物体向东走的距离大于地面上O点在同一时间间隔内所走的距离，这就定性地说明了落体东偏的原因。下面进行定量的计算。取坐标系Oxz如图8.19，x轴指向东，z轴指向上。物体自高h处自由落下，因此初条件为

$$\begin{cases} x(0)=0, \qquad z(0)=h; \\ \dot{x}(0)=v_A=(R+h)\omega\cos\lambda; \\ \dot{z}(0)=0. \end{cases}$$

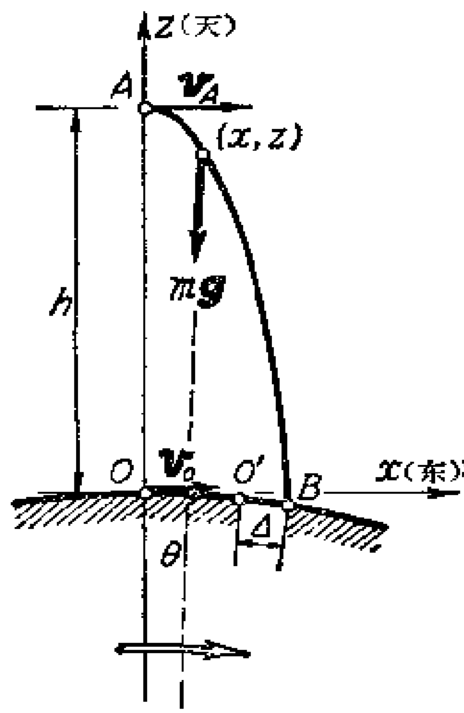


图8.19 落体东偏的另一种解释

质点所受的地心引力是有心力，所以质点下落的轨迹AB将是椭圆（见4-7）的一段，求出这个椭圆方程，解出它与地面的交点B，就可算出OB弧长，减去地面点O转过的弧长OO'，就是东偏量$\Delta=\widehat{O'B}$。这样的计算比

较复杂①。我们采用近似计算。因为 $h \ll R$，所以我们假设重力加速度 g 的大小不变，而方向总是指向地心②，即设 g 与 Oz 轴的夹角为

$$\theta \approx \frac{x}{R+z} \approx \frac{x}{R}.$$

于是可得落体的运动微分方程为

$$\ddot{x} = -\frac{g}{R}x, \quad \ddot{z} = -g.$$

根据前面所述的初条件，解出运动方程为

$$\begin{cases} x = (R+h)\omega\sqrt{\dfrac{R}{g}}\cos\lambda\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{R}}\,t\right), \\ z = h - \dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

落地所需的时间为 $t = \sqrt{2h/g}$，这时 $x \approx \overset{\frown}{OB}$，有

$$\overset{\frown}{OB} = (R+h)\omega\sqrt{\frac{R}{g}}\cos\lambda\sin\sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

在同样的时间内，地面上的点 O 以速度 v_O 东移，东移的距离为

$$\overset{\frown}{OO'} = v_O t = (R\omega\cos\lambda)t = R\omega\sqrt{\frac{2h}{R}}\cos\lambda.$$

于是落体东偏的距离为

$$\Delta = \overset{\frown}{OB} - \overset{\frown}{OO'}.$$

因为 $h/R \ll 1$，取

$$\sin\sqrt{\frac{2h}{R}} \approx \sqrt{\frac{2h}{R}} - \frac{1}{6}\left(\sqrt{\frac{2h}{R}}\right)^3.$$

代入，最后得

---

① 参阅Marion, J.B.《Classical Dynamics》，例11.4(b).

② 如g的方向也不变，计算就十分简单，AB是抛物线. 但这样的假设和考虑地球自转这个前提相矛盾，故不能得出正确的定量结果.

$$\Delta=\frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\lambda,$$

与在非惯性参考系中所得结果一致。

（三）傅科摆　傅科（Foucault，J.B.L.1819—1868年，法国科学家）在1851年曾利用单摆摆动平面的进动现象论证了地球的自转①。

设在北纬λ度处有一摆长为l的单摆。取z轴竖直向上，将l做得很长，这样摆锤M可近似地认为在水平面Oxy平面内运动(其运动轨迹见图8.21)。科氏加速度$-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$在平面内的分量为$-2\omega_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}$，其中$\omega_z=\omega\sin\lambda$。绳中张力$S$在水平面内的分量为$-S(\rho/l)\boldsymbol{\rho}^0$，且$S\approx mg$。因此摆锤$M$在水平面内的运动微分方程为

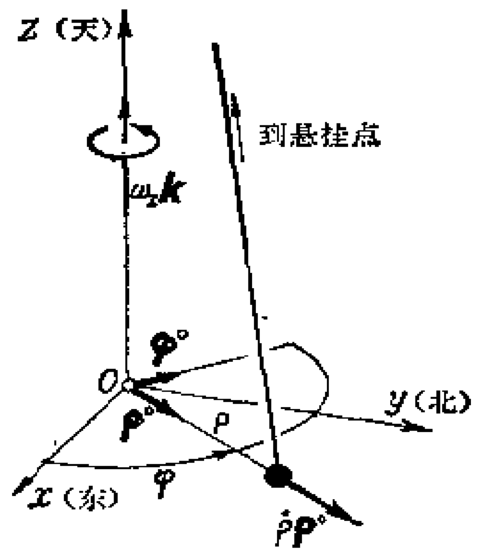


图8.20　傅科摆

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-mg\frac{\rho}{l}\boldsymbol{\rho}^0-2m\omega\sin\lambda\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}.$$

采用平面极坐标，于是

$$\boldsymbol{v}=\dot{\rho}\boldsymbol{\rho}^0+\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0,$$

将它代入上式，得出径向和横向两个投影方程

$$\begin{cases}m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)=-\dfrac{mg\rho}{l}+2m\rho\dot{\varphi}\omega\sin\lambda, & (1)\\ m(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi})=-2m\omega\dot{\rho}\sin\lambda. & (2)\end{cases}$$

我们感兴趣的是找出形式为$\dot{\varphi}=$常量的特解。将$\ddot{\varphi}=0$代入式

① 伽利略的学生Vincenzo Viviani (1622—1703) 在1650年时已经注意到摆动平面的缓慢转动，但没有作过解释。

(2)中，得

$$\dot{\varphi}=-\omega\sin\lambda。\qquad(3)$$

将式(3)代入式(1)，略去 ω^2 后得到

$$\ddot{\rho}+(g/l)\rho=0。\qquad(4)$$

方程(3)说明摆动平面作逆时针匀速进动（由上向下看，见图8.21），进动的周期是

$$\tau=2\pi/(\omega\sin\lambda),$$

在北京约为37小时。方程(4)说明，在摆动平面内摆锤的运动与单摆一样，其摆动周期是

$$T=2\pi/\sqrt{g/l}。$$

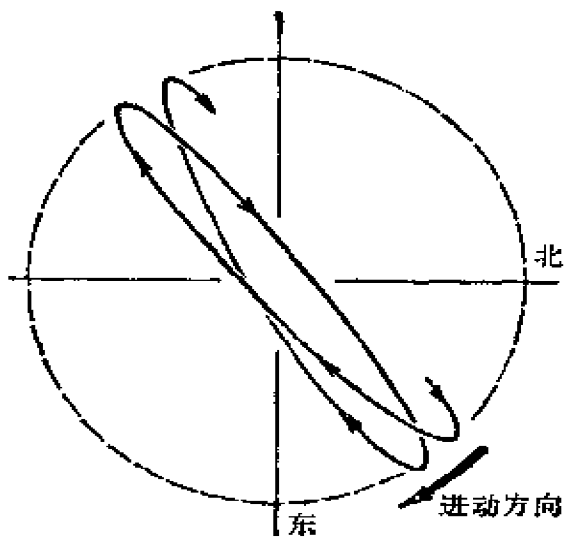


图8.21　摆锤运动的轨迹

傅科在1851年的实验是在巴黎（$\lambda=49°$）进行的，他利用的摆的数据如下：摆锤为质量是28千克的铁球，摆长为70米，摆动直径约为30余厘米。他测得的数据为 $\tau=32$ 小时，$T=17$ 秒。现在联合国总部大厅内按装着的傅科摆是一个重90公斤的镀金球，用一根长23米的不锈钢丝悬挂着，摆动平面的进动周期约为36小时45分。在北京天文馆里也有傅科摆供人参观。

* * *　试用地心参考系解释为什么傅科摆的摆动平面会有进动？ * * *

（四）与科氏力有关的其他现象

人们在地球上观察到的一些现象，总是习惯于用牛顿定律加

以解释，一旦观察到有加速度，就认为是有力的作用。例如当我们观察到落体偏东时，它就直接被解释为由于科氏力作用的结果，因为对于下落物体科氏力是向东的，所以落体要东偏。对于傅科摆也可以作类似的解释。一般地，在北半球，$\boldsymbol{\omega}$ 在竖直方向的分量 $\omega_z \boldsymbol{k}$ 是指向上的（在南半球则相反），当物体在水平面内运动，而人面向前进方向观察时，根据科氏力是 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$，可知它的水平分量 $\boldsymbol{F}_c$ 总是指向右边的（图8.22），这就使得运动物体总是向右侧偏移（在南半球正好相反）。比如图8.23所示的弹道，由于

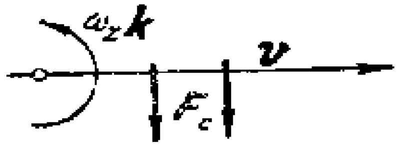


图8.22 科氏力水平分量的指向

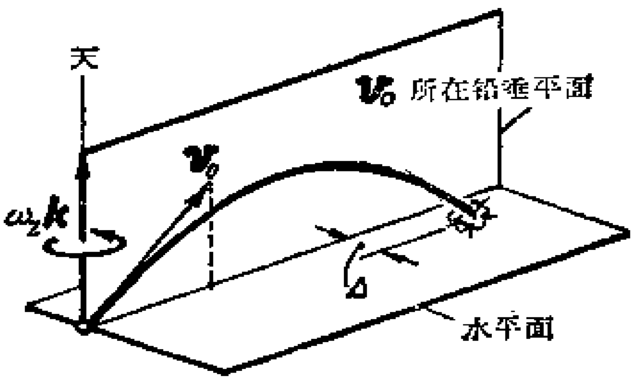


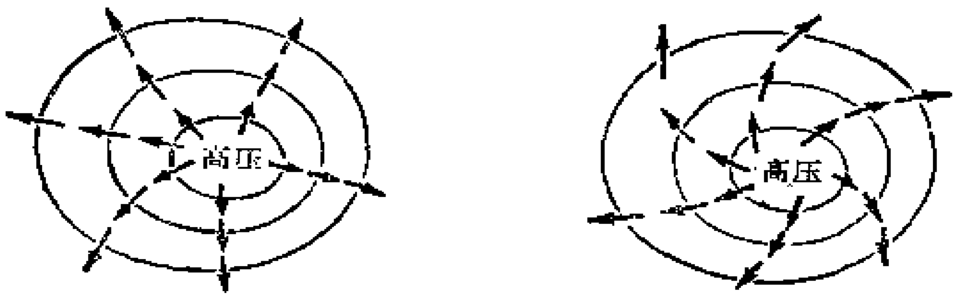
图8.23 弹道右偏

科氏力的作用，将偏右 Δ 值①。

在气象学中也有类似的现象，如果在某处有一个高压中心，当不计地球自转的影响时，大气流动的方向应垂直于等压线，即沿压力梯度的负方向（图8.24(a)），由于科氏力的作用，在北半球的流动将向右偏而生成旋风（图8.24(b)）。

由北半球中纬度（30°左右）地区吹向赤道低压区的风，由于科氏力作用产生右偏，使得北风变成由东北向西南吹的东北信

① 在第一次世界大战期间，英国炮手在马尔维纳斯（福克兰）群岛海战中发射的炮弹经常落在德国战舰的左方而不能命中。瞄准器的设计者了解科氏力的作用，并已把这个因素考虑在内。问题在于他们是按照假设海战在英国本土（约北纬50°）附近进行，并作了向左的校正，但是马尔维纳斯群岛却位于南美洲（约南纬50°）。设计者没有把校正的方法告诉那些不懂科氏力的炮手们，结果产生了双倍的向左误差！



(a) 不计地球的自转　　　　(b) 计入地球的自转

图8.24　旋风的生成

风[①]。

在北半球有不少河流大体上是由北向南流动的，如把河水当作我们讨论的质点，则河水受科氏力的作用应该向右偏移，所以河水总是对右岸有较大的冲刷作用。类似地，南北向的双轨（只能朝一个方向走的）铁道，右侧铁轨要比左侧铁轨磨损得厉害一些。

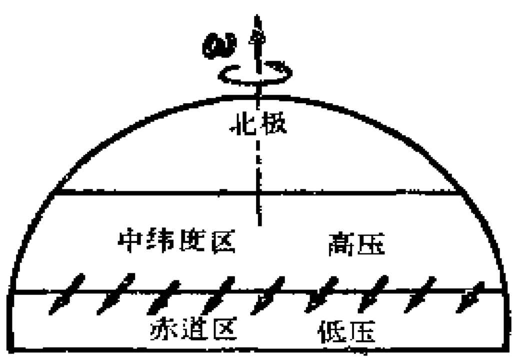


图8.25　信风

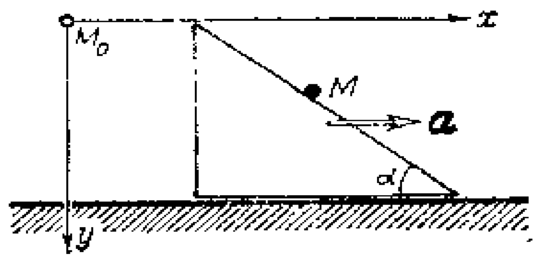
科氏力本身虽然很小，但由于长时间的作用，以上这些效果积累起来就成为可以观察到的自然现象。

习　题

8.1　一平板以等加速度 $a(<g)$ 竖直向下运动，板上悬挂一长为 l 的单摆。求摆的微振动周期。

① 信风的名称见李肇《唐国史补》。信，指可信它定期而来。信风按外文直译也称贸易风，或季风。

8.2 倾角为α的光滑直角棱柱体，沿一水平面作匀加速直线运动，加速度大小为a，初速为零(见图)。一重量为P的小球M无初速地沿棱柱体的斜面向下运动。求小球的相对加速度，绝对加速度，绝对轨迹及斜面的反作用力N。讨论下列特殊情况：



题 8.2 图

（1） $a=g\ \mathrm{tg}\ \alpha$；

（2） $a=-g\ \mathrm{ctg}\ \alpha$。

8.3 假设北京地区（北纬40°）的某铁轨南北向铺设，有一重2000吨的列车以速率15米/秒由南向北行驶，求列车对铁轨的侧压力。

8.4 重P的小环穿在形为$y=f(x)$的光滑钢丝上，这钢丝通过坐标原点并绕竖直轴Oy以等角速度ω转动。如果要使小环在钢丝上任何位置都能处于相对平衡状态，求钢丝的形状及平衡时钢丝对小环的作用力N。

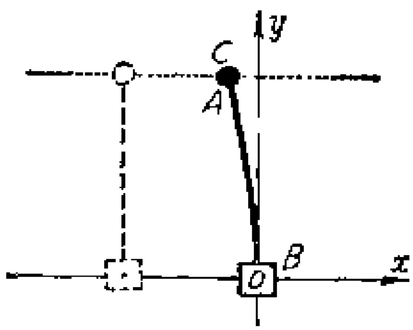
8.5 一质点放在光滑水平面Oxy上，这平面绕固定竖直轴Oz以等角速度ω转动。现给质点一水平初速度，证明在质点的相对运动中，以下的等式成立：

（1） $\dot{x}^2+\dot{y}^2-\omega^2(x^2+y^2)=$常量；

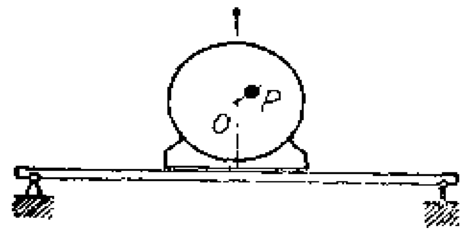
（2） $y\dot{x}-x\dot{y}-\omega(x^2+y^2)=$常量。

8.6 在竖直的弹性杆AB的一端A上附有重物C，其重量为2.5公斤。重物C能在平衡位置附近作简谐振动（见图），弹性力的大小与重物到平衡位置的距离成正比。杆AB的刚度是：使A端离开平衡位置1厘米，需用力0.1公斤。求当杆AB的B端

沿水平线作振幅为1毫米，周期为1.1秒的简谐振动时，重物C作强迫振动的振幅。



题 8.6 图



题 8.7 图

8.7 重30公斤的电动机安装在梁上。在电动机的转轴上装有重量为0.2公斤的偏心重物P，P到转轴O的距离为1.3厘米，电动机以常角速度$\omega=90$ 1/秒转动，梁的刚度$k=300$公斤/厘米。不计阻力和梁的质量。求电动机作强迫振动的振幅和临界转速(以每分钟转数表示)。

8.8 质量分别为m及m'的两个质点，用一固有长度为a的弹性绳相连，绳的弹性系数为

$$k=2mm'\omega^2/(m+m').$$

如果将它们放在光滑的水平直管内，管子绕通过管上一点的竖直轴以匀角速度ω转动，开始时质点相对于管子是静止的，两点间的距离为a。求任一瞬时两质点间的距离s。

8.9 一光滑水平面以匀角速ω绕通过固定点O的竖直轴转动。在这平面内有一质量为m的质点P受到平面上A点的吸引，$AO=c$，引力与距离$AP=r'$成正比，比例常数为$4\omega^2m$。当$t=0$时，A点在动坐标系x轴上，质点P从动坐标中的点$\left(\frac{8}{3}c,0\right)$，以相对速度$4c\omega/3$垂直于$OA$且顺着转动方向发射出去，求质点相对于转动平面的运动轨迹和相对于固定坐标系的运动轨迹。

8.10 质量为m的小环套在一光滑的金属丝上，金属丝的形

状为一顶点在下的抛物线，其方程为 $x^2=4ay$，a 为常数，y 轴竖直向上。如果金属丝以匀角速 ω 绕 y 轴转动，求小环相对于金属丝的运动微分方程。

8.11　一光滑细直管可在竖直平面内绕通过它的一端点的水平轴转动，转动角速度 ω 为常量。管中有一质量为 m 的重质点。开始时，细管在水平位置，质点与转动轴的距离为 a，质点相对于管的速度大小为 v_0。求质点相对于管子的运动规律。

8.12　直杆 OA 在光滑水平面上以等角速度 ω 绕其固定端 O 转动，同时它推动一个在这个平面上的质量为 m 的小方块。如果方块与杆之间的摩擦系数为 μ，求方块沿杆的相对运动规律。设开始时小方块与 O 点的距离为 a，小方块相对于杆的速度为零。

8.13　光滑水平面上的两轻杆 OA 和 AB 在 A 点铰接，$OA=a$，$AB=b$，在 B 端有一质量为 m 的质点。杆 OA 以等角速度 ω 绕过 O 点的竖直轴转动。说明质点相对于 OA 杆的运动类似于一单摆，并求这摆的折合长度和杆 AB 中的内力。

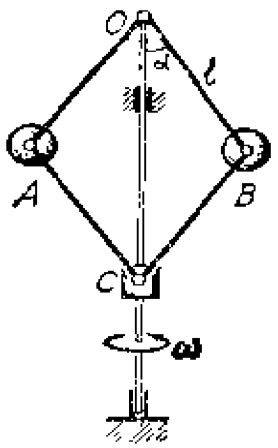
8.14　一光滑管子，其轴线为一平面曲线。管子安置在水平面上以等角速 ω 绕一固定竖直轴 Oz 转动。管内有一小球 M，它与 O 点的初始距离为 r_0，它相对于管子的初速度为零。证明：小球的相对速度

$$v_r=\omega\sqrt{r^2-r_0^2},$$

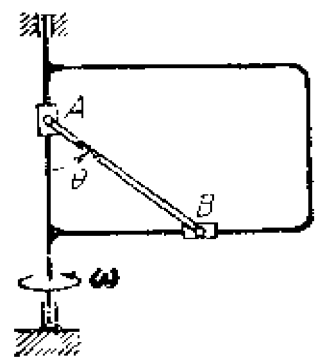
其中 r 为小球与 O 点的距离。

8.15　离心调速器由一个质量为 $2m$ 的套筒 C，两个质量同为 m 的小球 A 和 B，以及四根长度均为 l 的彼此铰接的轻直杆组成（见图）。设调速器的角速度 ω 为常量，不计摩擦。求相对平衡时杆与转动轴之间的夹角 α，并求在稳定平衡位置附近微振动的周期。

8.16　一均质杆 AB，长为 $2a$，质量为 m，两端点 A 和 B 分别沿一框架的竖直杆和水平杆无摩擦地滑动，框架以等角速度 ω 绕其竖直杆转动，求杆相对于框架的运动微分方程和相对平衡位

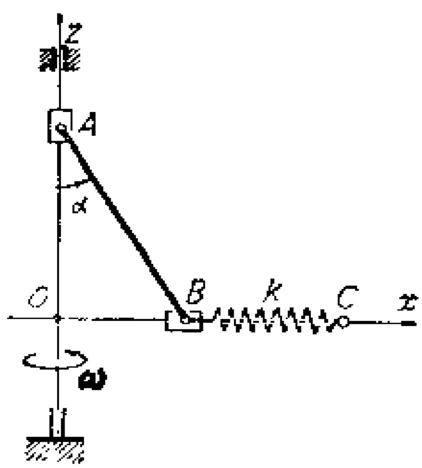


题 8.15 图



题 8.16 图

置。



题 8.17 图

8.17 质量为m，长为l的均质杆AB，其一端A可沿竖直轴Oz滑动，另一端B可沿水平轴Ox滑动，而Ox轴以匀角速ω绕Oz轴转动。B端与弹簧BC相连，C端固定在Ox轴上。当$\alpha=0$时，弹簧为原长。弹簧的刚度系数为k，不计摩擦，且$0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$。求杆的相对平衡位置并分析其稳定性，再求杆$AB$在稳定平衡位置附近微振动的周期。

8.18 考虑地球自转的影响，在纬度λ处的光滑水平面上一质点以相对初速度$\boldsymbol{v}_0$开始运动，求该质点相对地球的运动轨迹。

8.19 一火车在水平直轨上以常速率v行驶，考虑地球自转的影响，求证车厢内的单摆在平衡状态时其摆线与竖直线的夹角为$2\omega v\sin\lambda/g$，其中ω为地球自转角速度，λ为当地纬度。

8.20 一质点竖直上抛，到达高度h后又落至地面，不计空气阻力，计算到地球自转角速度ω的一次项，求落地时偏离了抛

出点多少距离？

8.21 一炮弹以初速 v_0，仰角 α 在地球表面北纬 λ 处向北发射，求经过时间 t 后炮弹东偏的距离。

8.22 一炮弹在地球表面北纬 λ 处向东发射，初速为 v_0，仰角为 α，证明炮弹落地时向南偏差的距离是

$$s=\frac{4v_0^3}{g^2}\omega\sin^2\alpha\cos\alpha\sin\lambda.$$

8.23 在上题中，如果不考虑地球自转时，炮弹的射程为 R，求证考虑地球自转后射程的变化为

$$\Delta R=\frac{1}{3}\omega\cos\lambda\left(\sqrt{18R^3(\operatorname{ctg}\alpha)/g}-\sqrt{2R^3(\operatorname{tg}\alpha)^3/g}\right).$$

8.24 在地球表面北纬 λ，高度 h 处自由下落一物体，不计空气阻力，如果精确到地球自转角速度 ω 的平方项，求证落体向南的偏差是

$$\Delta'=\frac{2h^2\omega^2}{3g}\sin\lambda\cos\lambda$$

（图8.18(b)）。

8.25 假定人造地球卫星的运行轨道是半径为 R 的圆，周期为 T。宇航员以相对速度 v_0 垂直地球表面投射一物。如果不计 r/R 的高次项（r 是投射物与卫星之间的距离），求证投射物相对于卫星的轨迹为一椭圆，周期也是 T。

第九章　刚体动力学

在 6-2 和 6-3 中，我们已经讨论了刚体的定轴转动和平面运动。在这一章中将研究刚体更一般的运动，出发点仍然是质点系的动量、动量矩和能量定理。

9-1　刚体定点运动时的动量矩和动能

设刚体绕固定点 O 运动，它的瞬时角速度是 $\boldsymbol{\omega}$。根据动量矩的定义，刚体对 O 点的动量矩为

$$\boldsymbol{G}=\sum(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}),$$

其中求和号是对质点系中所有的质点取的（如果刚体的质量是连续分布的，则求和号应换成积分号），在此表达式中，我们省略了下标 i。

由于$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$，并利用恒等式

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r},$$

可以将 $\boldsymbol{G}$ 表示成

$$\boldsymbol{G}=\left[\sum(mr^2)\right]\boldsymbol{\omega}-\sum\left[m(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}\right]. \tag{9.1}$$

在取定了直角坐标系以后，就可以分别写出 $\boldsymbol{G}$ 的各个分量表达式。在刚体定点运动学(3-3)中已知，直角坐标系可以取固定系$[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$，即 $Oxyz$ 系，或固连系$[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，即 $O\xi\eta\zeta$ 系。在目前情况下取固连系比较方便，因为刚体上任何一点的向径在固连系中表示为

$$\boldsymbol{r}=\xi\boldsymbol{e}_1+\eta\boldsymbol{e}_2+\zeta\boldsymbol{e}_3,$$

不管刚体怎样运动，上式中的 ξ,η,ζ 是不随时间变化的常量。

角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 在固连系中的表达式为

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_\xi \boldsymbol{e}_1+\omega_\eta \boldsymbol{e}_2+\omega_\zeta \boldsymbol{e}_3.$$

将上面两式代入式(9.1)中，可得 $\boldsymbol{G}$ 在 $O\xi$ 轴上的分量为

$$\begin{aligned}G_\xi &= \omega_\xi \sum[m(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)] \\ &\quad -\sum[m(\xi\omega_\xi+\eta\omega_\eta+\zeta\omega_\zeta)\xi] \\ &= \sum[m(\eta^2+\zeta^2)]\omega_\xi-\sum(m\xi\eta)\omega_\eta-\sum(m\xi\zeta)\omega_\zeta.\end{aligned}$$

同理可得 G_η 和 G_ζ，借助矩阵工具可以表成

$$\begin{bmatrix}G_\xi\\ G_\eta\\ G_\zeta\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}\sum[m(\eta^2+\zeta^2)] & -\sum(m\xi\eta) & -\sum(m\zeta\xi)\\ -\sum(m\xi\eta) & \sum[m(\zeta^2+\xi^2)] & -\sum(m\eta\zeta)\\ -\sum(m\zeta\xi) & -\sum(m\eta\zeta) & \sum[m(\xi^2+\eta^2)]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_\xi\\ \omega_\eta\\ \omega_\zeta\end{bmatrix}.$$

上式右端的方阵中，主对角线上的三个量分别是刚体绕 $O\xi$ 轴、$O\eta$ 轴和 $O\zeta$ 轴的转动惯量（见6-2中的定义），即

$$\begin{cases}J_\xi=\sum[m(\eta^2+\zeta^2)],\\ J_\eta=\sum[m(\zeta^2+\xi^2)],\\ J_\zeta=\sum[m(\xi^2+\eta^2)].\end{cases}\tag{9.2}$$

非对角线上的元素涉及到三个量，分别记作

$$\begin{cases}J_{\xi\eta}=\sum(m\xi\eta),\\ J_{\eta\zeta}=\sum(m\eta\zeta),\\ J_{\zeta\xi}=\sum(m\zeta\xi),\end{cases}\tag{9.3}$$

它们称为**惯量积**，或简称**惯积**。惯积的量纲和转动惯量的量纲相同。引入转动惯量和惯积后，动量矩 $\boldsymbol{G}$ 的各分量就可以表示为

$$\boxed{\begin{bmatrix}G_\xi\\ G_\eta\\ G_\zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\zeta\xi}\\ -J_{\xi\eta} & J_\eta & -J_{\eta\zeta}\\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_\xi\\ \omega_\eta\\ \omega_\zeta\end{bmatrix}}\tag{9.4}$$

*** 如果取固定坐标系 $Oxyz$，$\boldsymbol{G}$ 的分量是否能够表成式(9.4)这种形式，为什么？ ***

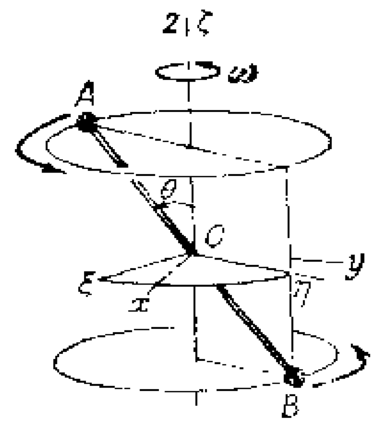


图9.1 哑铃的动量矩

例9.1 "哑铃"式刚体 AB 由长 $2l$ 的轻杆和两个质量为 m 的质点 A 和 B 组成，它绕 Oz 轴作定轴转动，O 为杆的中点，角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 与 BA 的夹角为 θ，求刚体的动量矩。

解 取固连直角坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 如图9.1所示。根据式(9.2)和(9.3)可得

$$J_\xi=2ml^2,\quad J_\eta=2ml^2\cos^2\theta,\quad J_\zeta=2ml^2\sin^2\theta,$$

$$J_{\xi\eta}=0,\quad J_{\eta\zeta}=-2ml^2\cos\theta\sin\theta,\quad J_{\zeta\xi}=0.$$

角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的三个分量为$(0,0,\omega)$。根据式(9.4)得

$$\begin{bmatrix}G_\xi\\G_\eta\\G_\zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2ml^2&0&0\\0&2ml^2\cos^2\theta&2ml^2\sin\theta\cos\theta\\0&2ml^2\sin\theta\cos\theta&2ml^2\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}$$

$$=2ml^2\omega\sin\theta\begin{bmatrix}0\\\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix},$$

即
$$\boldsymbol{G}=2ml^2\omega\sin\theta(\cos\theta\boldsymbol{e}_2+\sin\theta\boldsymbol{e}_3),$$

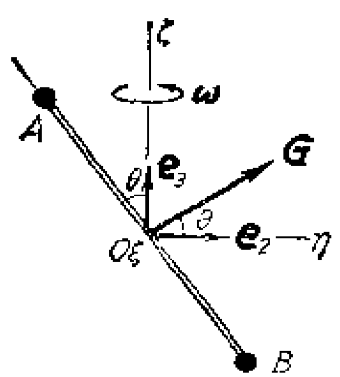


图9.2 $\boldsymbol{G}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 不平行

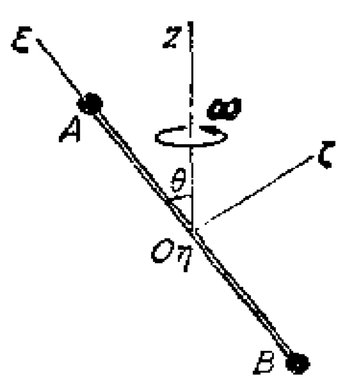


图9.3 另一个固连系

它是 $\xi\eta$ 平面中的一个向量，与杆 AB 相垂直。在惯性系中，$\boldsymbol{G}$ 随时间变化(图9.2)。此例说明 $\boldsymbol{G}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 不一定平行。 ▍

*** 对于上题，当 $O\xi\eta\zeta$ 系的方向取法不同时，$\boldsymbol{G}$ 的分量表达式繁简不一。图 9.3 中所示为另一种固连系，请将 $\boldsymbol{G}$ 的分量表示式写出来。***

下面推导刚体定点运动时动能的表达式。按定义动能是

$$T=\frac{1}{2}\sum(mv^2)=\frac{1}{2}\sum[m(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})].$$

将 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 代替上式右端中前一个 $\boldsymbol{v}$，并利用混合积的性质

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),$$

可得

$$T=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\sum(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}).$$

上式可以写成

$$\boxed{T=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{G}.} \tag{9.5}$$

即作定点运动的刚体，其动能等于角速度与动量矩点积之半。

动能是一个标量，因此它的值与坐标系的选取无关。如果选取固连系 $O\xi\eta\zeta$，将式(9.4)代入式(9.5)得

$$T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\omega_\xi\\\omega_\eta\\\omega_\zeta\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\zeta\xi}\\-J_{\xi\eta} & J_\eta & -J_{\eta\zeta}\\-J_{\zeta\xi} & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_\xi\\\omega_\eta\\\omega_\zeta\end{bmatrix} \tag{9.6}$$

或

$$\begin{aligned}2T=&J_\xi\omega_\xi^2+J_\eta\omega_\eta^2+J_\zeta\omega_\zeta^2-2J_{\xi\eta}\omega_\xi\omega_\eta\\&-2J_{\eta\zeta}\omega_\eta\omega_\zeta-2J_{\zeta\xi}\omega_\zeta\omega_\xi.\end{aligned} \tag{9.7}$$

可见，T 是角速度分量 $\omega_\xi,\omega_\eta,\omega_\zeta$ 的二次型。

刚体绕固定轴 Oz 的转动可以看成是绕固定点运动的特殊情况，此时取 $O\zeta$ 与 Oz 重合，于是

$$\omega_\eta=\omega_\xi=0, \quad \omega_\zeta=\omega,$$

上式就回到了熟悉的式

$$T=\frac{1}{2}J_z\omega^2.$$

例9.2 求例9.1中“哑铃”式刚体的动能。

解 取图9.1所示的固连坐标系 $O\xi\eta\zeta$，则

$$T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}2ml^2 & 0 & 0\\0 & 2ml^2\cos^2\theta & 2ml^2\sin\theta\cos\theta\\0 & 2ml^2\sin\theta\cos\theta & 2ml^2\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}$$

$$=ml^2\omega^2\sin^2\theta.$$

当然，也可以直接代入二次型表达式(9.7)中求出 T。 ▌

9-2 惯量张量和惯量矩阵

我们已经习惯于用标量和向量来描述某些物理量，并通过它们以及它们的一些运算法则来描述客观的物理规律。有一类物理量需要用更复杂的张量才能描述清楚。

张量是向量概念的推广。我们先复述向量的一个基本性质，并把向量的定义变换成一种便于推广的形式。

在三维空间中，当直角坐标向量基由 **e** 变到 **e**′ 时，任意一个向量 $\boldsymbol{a}$，在这两组基中的分量必定满足下面的线性变换关系

$$a_i=\sum_{j=1}^{3}p_{ij}a_j' \tag{9.8}$$

或写成矩阵形式

$$\mathbf{a}=\mathbf{p}\mathbf{a}', \tag{9.9}$$

其中 **a** 和 **a**′ 分别是向量 $\boldsymbol{a}$ 在基 **e** 和 **e**′ 中的分量列阵 $[a_1,a_2,a_3]^T$ 和 $[a_1',a_2',a_3']^T$，而 p_{ij} 是变换矩阵 **p** 的元素。

由此可见，并不是随便取三个数量写成一个列阵就可以认为它们是某个向量的分量。例如，描述一个人的特征，可以取三个不同的量写成列阵如下：

$$\begin{bmatrix} \text{年龄(岁数)} \\ \text{身高(厘米数)} \\ \text{体重(公斤数)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 170 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

对于这个列阵不能进行坐标变换，因此它们不能是某个向量的分量。

可以把式(9.8)或(9.9)作为向量的**定义**，即在三维空间中有三个数量，当坐标变换时，它们在不同坐标系中的分量满足关系式(9.8)或(9.9)，则它们就是三维空间中某个向量的分量。

三维空间中二阶张量的定义如下：

设在三维空间中，对应直角坐标向量基 $\mathbf{e}$ 有九个数量，我们把它们写成一个方阵

$$\mathbf{S} = [S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}. \qquad (9.10)$$

如果正交变换 $\mathbf{P}$ 将基 $\mathbf{e}$ 变为基 $\mathbf{e}'$，将 $\boldsymbol{S}$ 变为 $\mathbf{S}' = [S'_{ij}]$，且它们满足线性变换关系

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} p_{ik} p_{jl} S'_{kl}, \qquad (9.11)$$

或写成矩阵形式

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{S}'\mathbf{P}^T. \qquad (9.12)$$

则这九个量就定义为一个二阶张量在 $\mathbf{e}$ 基中的分量，这个张量记作 $\vec{\vec{S}}$。为简便起见，我们把张量分量所组成的矩阵(9.10)就叫做张量，而不用上面这个张量符号。

由此可知，与向量情况类似，并不是随便取九个数量就可以组成一个张量的。虽然张量(9.10)在形式上就是一个矩阵，但是它与矩阵的概念是完全不同的，必须严格地加以区别。

我们知道，虽然向量的分量在坐标变换时要发生变化，但是向量本身并不依赖于坐标系。类似地，当坐标系不同时，张量的

分量将按规律(9.11)或(9.12)变化，但是张量本身是一个不依赖于坐标系的量。因此我们就可以用它来描述某些不依赖于坐标系的客观存在的物理量。

如果式(9.10)中各元素满足关系

$$S_{ij}=S_{ji},$$

则此张量称为**对称张量**。如果满足关系

$$S_{ij}=-S_{ji},$$

则此张量称为**反对称张量**。按此定义去检验第三章中的角速度矩阵，不难说明它确是一个二阶反对称张量的分量矩阵。

张量的代数运算定义如下：

1. 张量的相等。

设有两个张量，它们在同一组基中的分量分别为 $[S_{ij}]$ 和 $[T_{ij}]$，如果它们相应的元素相等，即

$$S_{ij}=T_{ij},$$

则称此两张量相等。

根据式(9.11)可以立刻证明，如果两个张量在某一组基中分量相等，则它们在任一组基中分量均相等。

2. 张量的加减。

设有两个二阶张量 $[S_{ij}]$ 和 $[T_{ij}]$，它们的和或差是指将相应的分量相加或相减，即

$$[S_{ij}\pm T_{ij}].$$

根据张量的定义式(9.11)，不难验证它也是一个二阶张量。

3. 张量和标量相乘。

设 $[S_{ij}]$ 是一个二阶张量，λ 是标量，将张量的各个分量都乘以 λ，得

$$[\lambda S_{ij}].$$

根据式(9.11)，不难验证它是一个二阶张量。

4. 张量和向量的乘积。

设 $[S_{ij}]$ 是二阶张量，$\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它在同一组基中的分量

为$[a_1,a_2,a_3]^T$，定义

$$b_i=\sum_{j=1}^{3}S_{ij}a_j,\qquad i=1,2,3.$$

或写成矩阵形式

$$\mathbf{b}=\mathbf{S}\mathbf{a}. \tag{9.13}$$

在上式中，$\mathbf{S}$ 对应于张量，$\mathbf{a}$ 对应于向量，而 $\mathbf{b}$ 是列阵$[b_1,b_2,b_3]^T$。根据式(9.11)和(9.8)，可以验证列阵 $\mathbf{b}$ 满足变换关系式(9.9)，因此它对应一个向量 $\boldsymbol{b}$。

由式(9.13)看出，二阶张量 $\mathbf{S}$ 通过线性变换关系（变换矩阵就是张量的分量矩阵）把一个向量变成另外一个向量。我们也可以给二阶张量下这样的**定义**：一个把向量变成向量的线性变换叫做二阶张量。此时式(9.12)就成为二阶张量的一个基本性质，理由如下：

设由基 $\mathbf{e}$ 到基 $\mathbf{e}'$ 的变换关系为

$$\mathbf{e}'=\mathbf{e}\mathbf{P}.$$

根据式(9.9)有

$$\mathbf{a}=\mathbf{P}\mathbf{a}',\qquad \mathbf{b}=\mathbf{P}\mathbf{b}'. \tag{9.14}$$

在基 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{e}'$ 中某一张量的分量矩阵分别为 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{S}'$，将式(9.14)代入式(9.13)，然后左乘 $\mathbf{P}^T$，得

$$\mathbf{b}'=\mathbf{P}^T\mathbf{S}\mathbf{P}\mathbf{a}'.$$

于是得

$$\mathbf{S}'=\mathbf{P}^T\mathbf{S}\mathbf{P}.$$

因为 $\mathbf{P}$ 为单位正交矩阵，即 $\mathbf{P}\mathbf{P}^T=\mathbf{I}$，所以立即可得出式(9.12)。

类似于式(9.11)还可以在三维空间中定义更高阶的张量。一般说来 n 阶张量共有 3^n 个分量，每一个分量含有 n 个可变脚标，每个脚标可取 1,2,3。例如三阶张量共有 27个分量，它们应该满足线性变换关系

$$S_{ijk}=\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\sum_{t=1}^{3}p_{il}p_{jm}p_{kt}S_{lmt}.$$

从这个意义上说，当 $n=0$ 时得零阶张量，它就是标量，当 $n=1$ 时得一阶张量，它就是向量。这样，我们就把标量、向量和张量从定义上统一起来了。

对比式(9.4)和(9.13)，可以看出

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_\zeta \end{bmatrix} \tag{9.15}$$

是一个对称张量 $\overrightarrow{\overrightarrow{J}}$ 的分量矩阵，这个张量叫做**惯量张量**，而式(9.15)叫做**惯量矩阵**。为了简便起见，我们把 $\mathbf{J}$ 就称为惯量张量。式(9.4)说明惯量张量 $\overrightarrow{\overrightarrow{J}}$ 是将刚体角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 变成动量矩向量 $\boldsymbol{G}$ 的线性变换，即

$$\boldsymbol{G}=\overrightarrow{\overrightarrow{J}}\boldsymbol{\omega}.$$

或者在不致引起误解的时候，写成为

$$\boxed{\boldsymbol{G}=\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}.} \tag{9.4$'$}$$

在惯量矩阵中，每一个元素只和刚体本身的几何形状以及刚体的密度分布情况有关，而与刚体的转动角速度无关，即与运动无关。若刚体质量是连续分布的，在具体计算惯量矩阵各个元素时，应将求和号$\sum$改为相应的积分号。

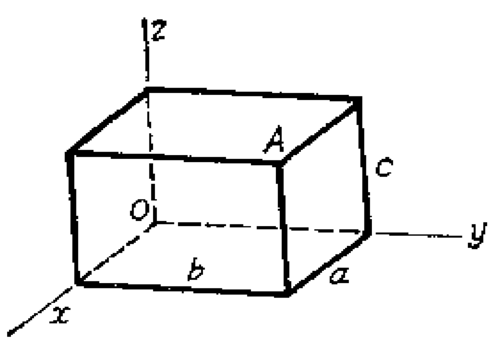


图9.4　长方体

例9.3　均质长方体（图9.4），$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$，$0\leqslant z\leqslant c$，质量为M，求对 $Oxyz$ 的惯量矩阵 $\mathbf{J}$。

解　设密度是 μ，则有

$$\mu=M/abc.$$

于是有

$$J_x=\int_V(y^2+z^2)\mu dV=\frac{M}{3}(b^2+c^2),$$

$$J_{xy}=\int_V xy\,\mu dV=\frac{1}{4}Mab.$$

根据类似的计算，可以求出其他各个元素。实际上由于 x,y,z 在计算式中位置相当，可以参照以上结果直接将其他元素写出来，最后得到

$$\mathbf{J}=M\begin{bmatrix}\frac{1}{3}(b^2+c^2) & -\frac{1}{4}ab & -\frac{1}{4}ac\\ -\frac{1}{4}ab & \frac{1}{3}(c^2+a^2) & -\frac{1}{4}bc\\ -\frac{1}{4}ac & -\frac{1}{4}bc & \frac{1}{3}(a^2+b^2)\end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

在6-2中，刚体对一轴的转动惯量有平行移轴定理（见式(6.13)），对于惯积也有类似的结果。设 $C\xi'\eta'\zeta'$ 是过刚体质心 C 的固连标架，$O\xi\eta\zeta$ 是过 O 点的另一组平行的固连标架（图9.5）。$J_{\xi'\eta'}$ 和 $J_{\xi\eta}$ 分别是对两组标架相应的惯积。又设 O 点在 $C\xi'\eta'\zeta'$ 中的坐标为 (a,b,c)，则有

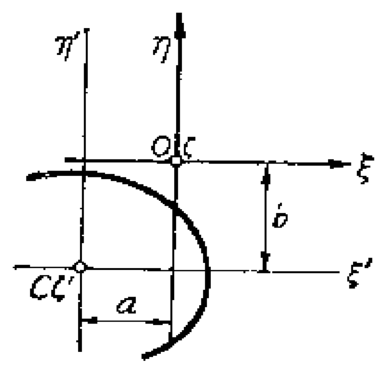


图9.5 平行移轴

$$J_{\xi\eta}=\sum(m\xi\eta)=\sum[m(\xi'-a)(\eta'-b)]$$
$$=\sum(m\xi'\eta')-a\sum(m\eta')-b\sum(m\xi')+ab\sum m.$$

因为坐标系 $C\xi'\eta'\zeta'$ 的原点在质心，由质心的定义应有

$$\sum(m\eta')=\sum(m\xi')=0,$$

于是得到

$$J_{\xi\eta}=J_{\xi'\eta'}+Mab. \tag{9.16}$$

因此，整个惯量矩阵的平行移轴定理可以表成为

$$\mathbf{J}^{(O)}=\mathbf{J}^{(C)}+M\begin{bmatrix}(b^2+c^2) & -ab & -ac\\ -ab & (c^2+a^2) & -bc\\ -ac & -bc & (a^2+b^2)\end{bmatrix},\tag{9.17}$$

其中 $\mathbf{J}^{(O)}$ 和 $\mathbf{J}^{(C)}$ 分别是刚体在 $O\xi\eta\zeta$ 和 $C\xi'\eta'\zeta'$ 中的惯量矩阵。

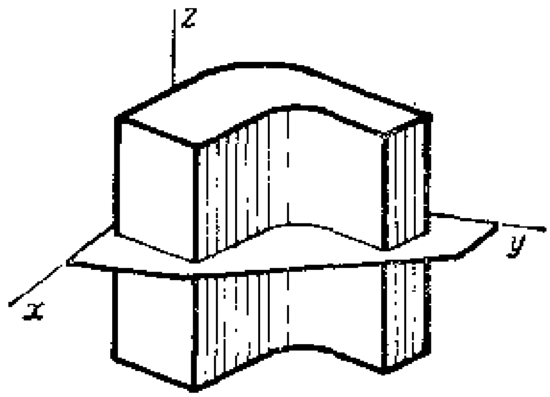


图9.6 $J_{yz}=0$，$J_{zx}=0$

对于具有对称平面的均质刚体，惯积的计算可以大为简化。例如，图 9.6 中 Oxy 是物体的对称平面，则

$$J_{yz}=\sum(myz)$$
$$=\sum_{\text{上半部}}(myz)+\sum_{\text{下半部}}(myz)。$$

在求两个和式时，总可以取相同的 y 以及等值反号的 z，使这两个和式相加为零，故有

$$J_{yz}=0,\quad J_{xz}=0。$$

例9.4 均质圆锥体，质量为 M，高为 h，底半径为 a，质心为 C。求相对标架 $Cx'y'z'$ 的惯量矩阵 $\mathbf{J}^{(C)}$，并由此求出相对标架 $A\xi\eta\zeta$（图9.7）的惯量矩阵 $\mathbf{J}^{(A)}$。

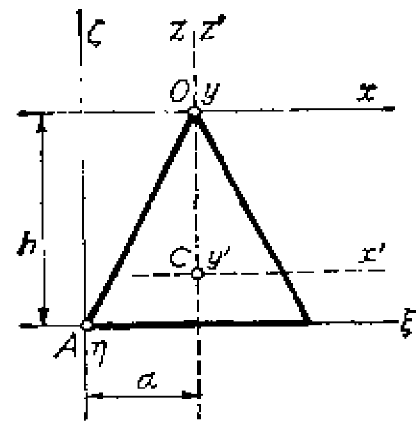


图9.7 求圆锥体的惯量矩阵

解 过顶点 O 取标架 $Oxyz$ 如图 9.7 所示，由于对称性，所有惯积均为零。

J_x, J_y, J_z 可以分别由积分求得。例如求 J_x 时，取厚度为 dz 的体积元，它的质量是

$$dm=\frac{M}{\pi a^2h/3}\cdot\pi\left(\frac{z}{h}a\right)^2dz。$$

应用平行移轴定理可以写出它对 x 轴的转动惯量是

$$dJ_x = dm\left[\frac{1}{4}\left(\frac{z}{h}a\right)^2 + z^2\right]。$$

将上式由 $z=-h$ 到 $z=0$ 积分，可得

$$J_x = M\left(\frac{3}{20}a^2 + \frac{3}{5}h^2\right)。$$

同理可得 $J_y = J_x$，$J_z = 3Ma^2/10$。所以惯量矩阵为

$$\mathbf{J}^{(O)} = M\begin{bmatrix} \frac{3}{20}a^2 + \frac{3}{5}h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}a^2 + \frac{3}{5}h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3a^2}{10} \end{bmatrix}。$$

应用式(9.17)，可求出相对于原点在质心 C 的平行标架 $Cx'y'z'$ 的惯量矩阵

$$\mathbf{J}^{(C)} = M\begin{bmatrix} \frac{3}{20}a^2 + \frac{3}{80}h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}a^2 + \frac{3}{80}h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}a^2 \end{bmatrix}。$$

再利用式(9.17)，即可求得

$$\mathbf{J}^{(A)} = \frac{M}{20}\begin{bmatrix} 3a^2 + 2h^2 & 0 & -5ah \\ 0 & 23a^2 + 2h^2 & 0 \\ -5ah & 0 & 26a^2 \end{bmatrix}。$$

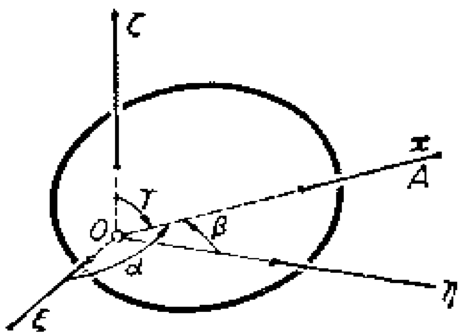


图9.8　求对 OA 轴的转动惯量

利用式(9.12)很容易推演出转动惯量的转轴公式。设某一刚体的惯量张量在 $O\xi\eta\zeta$ 坐标中的分量矩阵为式(9.15)。过 O 点的任意轴 OA 的方向余弦为($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$)，求刚体对 OA 轴的转动惯量。取 OA 为另外一个固连直角坐标架 $Oxyz$ 的 x 轴（图9.8，图中 y 轴和 z 轴未画出），则变换矩阵

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \cdots & \cdots\\ \cos\beta & \cdots & \cdots\\ \cos\gamma & \cdots & \cdots\end{bmatrix},\tag{9.18}$$

其中第二、三列元素与结果无关，故不必详细写出。将式(9.15)和(9.18)代入式(9.12)就可以算出对 OA 轴的转动惯量 J_{OA}，即

$$J_x=[\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma]\ \mathbf{J}\ [\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma]^T,$$

或展开成为

$$J_{OA}=J_x=J_\xi\cos^2\alpha+J_\eta\cos^2\beta+J_\zeta\cos^2\gamma-2J_{\xi\eta}\cos\alpha\cos\beta$$
$$-2J_{\eta\zeta}\cos\beta\cos\gamma-2J_{\zeta\xi}\cos\gamma\cos\alpha.\tag{9.19}$$

这就是转动惯量的转轴公式，它是方向余弦的一个二次型。有了(9.19)和(9.17)两个关系式，在知道了过某一点的惯量张量以后，就可以求出对任何一根轴的转动惯量。

例9.5　求例9.3中均质长方体对它的对角线的转动惯量。

解　惯量矩阵 $\mathbf{J}$ 已由例9.3算出。由图9.4，对角线 OA 的方向余弦为

$$[\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma]=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}[a,b,c],$$

所以对于对角线 OA 的转动惯量为

$$J_{OA}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}[a,b,c]\ \mathbf{J}\ [a,b,c]^T$$

$$=\frac{M}{6}\cdot\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2+c^2}. \quad ▎$$

在平面情况下，公式(9.19)可以用莫尔圆方法来表示。

设有一平面薄板，取平面内的固连系 Oxy，则讨论此平面问题时只涉及 J_x, J_y 和 J_{xy} 三个量，所以将 $\mathbf{J}$ 简写成

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y \end{bmatrix}.$$

若在此平面内另取一坐标系 $Ox'y'$，与原坐标系之间的夹角为 θ（图9.9(a)），相应的惯量矩阵为

$$\mathbf{J}'=\begin{bmatrix} J_{x'} & -J_{x'y'} \\ -J_{x'y'} & J_{y'} \end{bmatrix}.$$

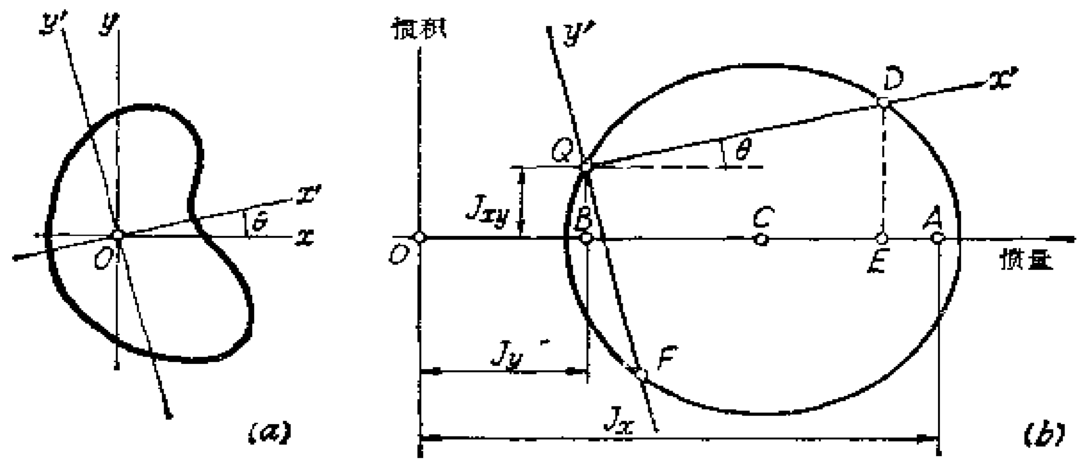


图9.9 莫尔圆

从坐标架 Oxy 到 $Ox'y'$ 的变换矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

于是由式(9.12)得到相对于 $Ox'y'$ 的惯量矩阵为

$$\mathbf{J}'=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

展开得

$$\begin{cases} J_{x'} &= J_x \cos^2\theta + J_y \sin^2\theta - 2J_{xy}\sin\theta\cos\theta, \\ J_{y'} &= J_x \sin^2\theta + J_y \cos^2\theta + 2J_{xy}\sin\theta\cos\theta, \\ J_{x'y'} &= (J_x - J_y)\sin\theta\cos\theta + J_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta). \end{cases} \tag{9.20}$$

式(9.20)中所表示的 $J_{x'}$,$J_{y'}$,$J_{x'y'}$ 与 J_x,J_y,J_{xy} 之间的关系可以用图解表示如下：

如图9.9(b)所示，取惯量为横坐标，惯积为纵坐标。在惯量轴上取 $OA=J_x$，$OB=J_y$，作 $BQ=J_{xy}$(BQ 与惯积轴平行，$J_{xy}>0$ 时，Q 点在上半平面；反之在下半平面)，Q 点称为“定点”(注意它总是从与 J_y 对应的 B 点出发作出的，不能从与 J_x 对应的 A 点出发)。以 AB 的中点 C 为圆心，CQ 为半径作圆。过定点 Q 作 QD 平行于 Ox' 轴，与圆交于 D 点，可以证明有以下关系（见习题9.1）：

$$OE=J_{x'}, \quad ED=J_{x'y'},$$

其中 $J_{x'}$ 恒为正，当 D 在上半平面时 $J_{x'y'}$ 为正，反之为负。

由式(9.20)可知

$$J_{x'}+J_{y'}=J_x+J_y,$$

由此可以求出 $J_{y'}$，它也可以由圆上 F 点（DF 是直径，QF 平行于 Oy' 轴）的横坐标得出。为了验证定点 Q 取得是否正确，可以令 $\theta=0$，于是 QD 平行于惯量轴，这时交点 D 的横坐标应该就是 J_x。用这种作图法求坐标轴转动后的惯量和惯积，称为**莫尔圆方法**[1]，它在材料力学中分析平面应力状态时也有用。实际上，它对于平面情况的二阶对称张量，在坐标轴转动时的分量计算带有普遍意义。

例9.6 矩形薄板长宽分别为 $3a$ 和 $2a$，质量为 m，在板平面上过一个顶点的所有轴中，问对哪一轴的转动惯量最小？最小值等于多少？

---

① Otto Mohr，德国工程师，1880年提出这种方法。

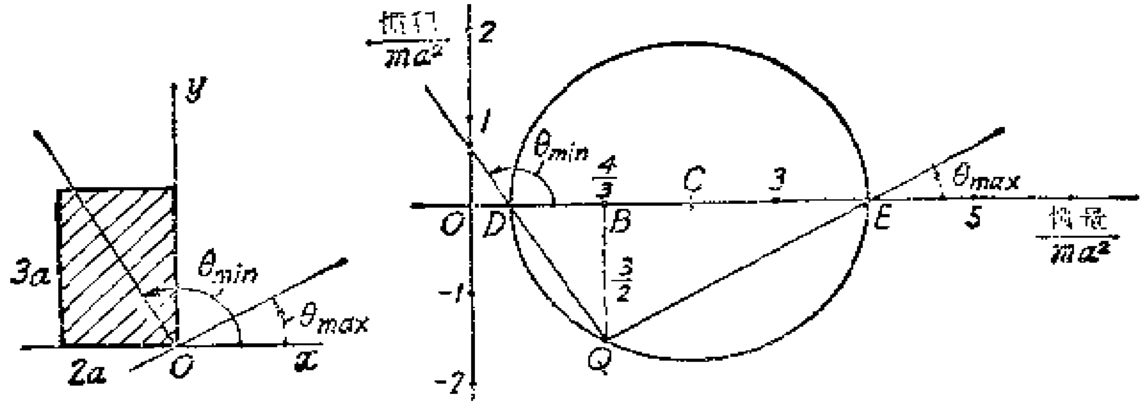


图9.10　用莫尔圆求最大和最小惯量

解　取 Oxy 如图9.10所示，有

$$J_x = 3ma^2, \quad J_y = \frac{4}{3}ma^2, \quad J_{xy} = -\frac{3}{2}ma^2.$$

作莫尔圆如图，$OC = (13/6)ma^2$，半径

$$CQ = \frac{\sqrt{106}}{6}ma^2.$$

莫尔圆与惯量轴的交点为 D 和 E，则 OD 的量值就是最小惯量，即

$$J_{\min} = OD = ma^2 \cdot \frac{13-\sqrt{106}}{6} = 0.4507ma^2.$$

对应的 θ 角为

$$\theta_{\min} = 90° + \operatorname{arc\,tg}\frac{9}{5+\sqrt{106}} = 120°28'. \quad ▌$$

＊＊＊　分别画出图9.11中三个平面物体的莫尔圆，并求出

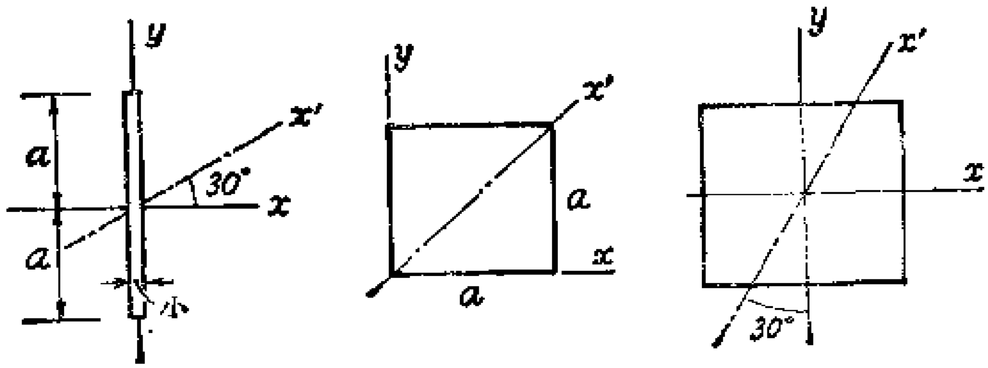


图9.11　莫尔圆的练习

$J_{x'}$，设物体的质量为已知。＊＊＊

9-3 惯量椭球和主惯量

虽然惯量张量与坐标轴的方向无关，但是惯量矩阵与坐标轴的方向有关。本节的目的在于寻求这样的坐标轴方向，使得惯量张量相对于它的惯量矩阵具有最简单的形式。

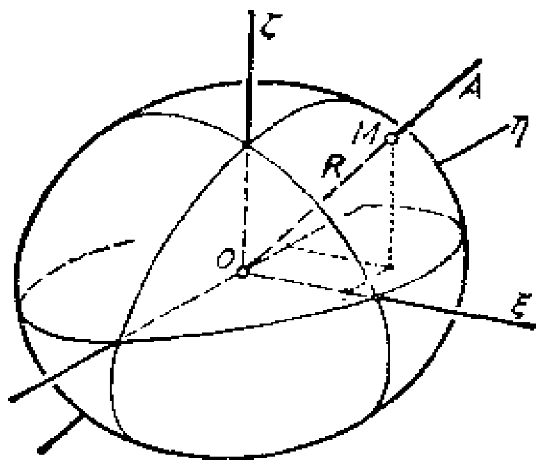


图9.12 惯量椭球

设有一任意轴 OA，刚体相对于这根轴的转动惯量为 J'。在 OA 轴上取一点 M（图 9.12），使得 OM 的长度 R 与 J' 的平方根成反比，即

$$R=OM=k/\sqrt{J'},\tag{9.21}$$

其中 k 是适当选取的常量。

当 OA 轴的方向取遍空间的各个方向时，M 点在空间的位置组成一个曲面。设 M 点在 $O\xi\eta\zeta$ 坐标系中的坐标是 (ξ,η,ζ)，则有关系

$$\begin{cases}\cos\alpha=\xi/R,\\ \cos\beta=\eta/R,\\ \cos\gamma=\zeta/R.\end{cases}$$

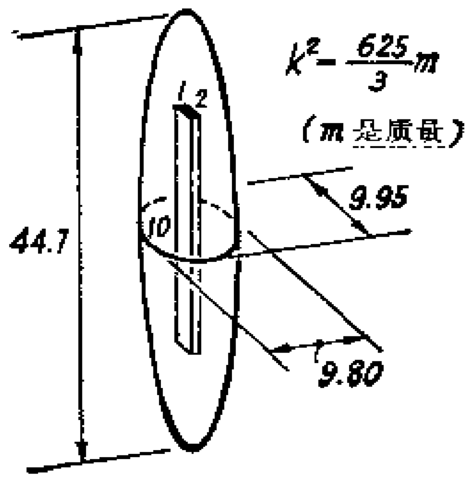
将上列关系代入式(9.19)，并注意到 $J'=k^2/R^2$，得

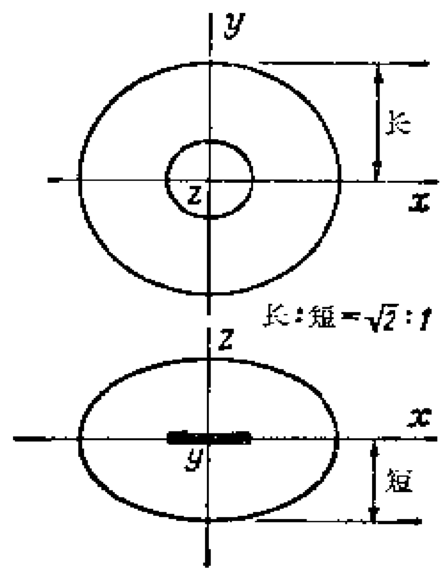
$$J_\xi\xi^2+J_\eta\eta^2+J_\zeta\zeta^2-2J_{\xi\eta}\xi\eta-2J_{\eta\zeta}\eta\zeta-2J_{\zeta\xi}\zeta\xi=k^2.\tag{9.22}$$

这就是上述曲面的方程，它是一个二次曲面。按定义，必有 $J'>0$（只有在刚体退化为沿 OA 的细线时，才有 $J'=0$），由此可知 R 应该是一个有限量，即式(9.22)所表示的只能是一个椭球面，这个椭球面称为**惯量椭球**。

对于均质的刚体，其质心惯量椭球（O 点取在刚体的质心上）

的形状大致与刚体本身的形状相类似。比如刚体的形状是长长的，那么质心惯量椭球也将是长长的。又如对于圆形薄片，质心惯量椭球是一个扁形的旋转椭球，分别如图9.13(a)和(b)所示。





(a) 长条形刚体　　　　(b) 圆薄片形刚体

图9.13 长形和扁形刚体的惯量椭球

例9.7 求例9.6中长方形薄板的惯量椭球。

解 容易算得

$$J_x=3ma^2,\quad J_y=\frac{4}{3}ma^2,\quad J_{xy}=-\frac{3}{2}ma^2,$$

$$J_z=\frac{13}{3}ma^2,\quad J_{yz}=J_{zx}=0.$$

将上述数据代入式(9.22)，化简后得

$$9x^2+9xy+4y^2+13z^2=3k^2/ma^2.$$

图9.14画出了这个椭球面在 x-y 平面上的截线，它是一个椭圆。图中两个椭圆分别对应于 $k^2=3ma^4$ 和 $12ma^4$ 的情形。当取 $k^2=12ma^4$ 时，在 x-y 平面上的椭圆方程是

$$9x^2+9xy+4y^2=36a^2,$$

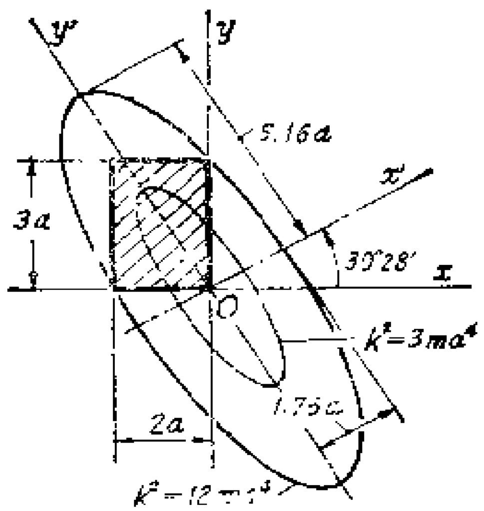


图9.14　平板的惯量椭球

它的半长轴和半短轴分别是 $5.16a$ 和 $1.76a$，由式(9.21)算出对应的转动惯量为

$$J_{y'}=0.4507ma^2$$

和

$$J_{x'}=3.883ma^2.$$

图中没有画出 z 方向的形状，椭球面对于 Oxy 平面对称，z 方向的半轴长为 $1.664a$，即 O 点沿 Oz 方向离椭球面最近，因而对于此轴的转动惯量 J_z 是所有方向中的一个最大值。▌

从解析几何知道，一个椭球总有三根互相垂直的主轴。如果我们把这三根主轴取作坐标轴 $Oxyz$①，那么惯量椭球面方程式(9.22)将简化为

$$J_1x^2+J_2y^2+J_3z^2=k^2,$$

其中 J_1,J_2,J_3 就是 J_x,J_y,J_z。方程中不出现坐标交叉的乘积，这是有心二次曲面的标准形式。

惯量椭球的主轴称为刚体对于原点 O 的**惯量主轴**，相应的惯量 J_1,J_2,J_3 称为**主惯量**，所以某轴为惯量主轴的充分必要条件是对于该轴的惯积等于零。主轴的方向以及相应的主惯量，在解析几何中已经提供了直接的求取方法，无需再细述。下面从另外一个角度，结合惯量张量的物理意义，用矩阵特征值的方法来求主轴和主惯量，这种计算对于对称张量具有普遍的意义。如上所说惯量张量 $\mathbf{J}$ 是一个线性变换，它将角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 变换成动量矩向量 $\boldsymbol{G}$，一般地说 $\boldsymbol{G}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 不共线。现在我们要问，是否存在这样方向的轴，如果 $\boldsymbol{\omega}$ 沿此方向（即这根轴是刚体的瞬时转动

---

① 此处 $Oxyz$ 实际上是固连坐标系，为了显示它是主轴所组成的标架，所以用符号 x,y,z，请不要与前面所用的固定坐标系混淆。

轴），则动量矩 $\boldsymbol{G}$ 也正好沿此方向？如果有则应满足关系

$$\boldsymbol{G}=\lambda\boldsymbol{\omega},$$

其中 λ 是一个待求的标量。因为 $\boldsymbol{G}=\mathbf{J}\,\boldsymbol{\omega}$，故有

$$\mathbf{J}\,\boldsymbol{\omega}=\lambda\boldsymbol{\omega},$$

或

$$\begin{bmatrix} J_\xi-\lambda & -J_{\xi\eta} & -J_{\zeta\xi} \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta-\lambda & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta\end{bmatrix}=0.$$

$\omega_\xi,\omega_\eta,\omega_\zeta$ 不能全为零（否则 $\boldsymbol{\omega}=0$，这与我们讨论的前提矛盾），因而上式中矩阵的行列式应为零，即得到一个决定 λ 值的方程

$$\begin{vmatrix} J_\xi-\lambda & -J_{\xi\eta} & -J_{\zeta\xi} \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta-\lambda & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{9.23}$$

这就是**特征方程**。所以求 λ 的问题就化成求矩阵 $\mathbf{J}$ 的特征值问题。下面将看到，与此特征值相对应的特征向量的方向就是我们要求的惯量主轴的方向，简称**主方向**。

在以后的讨论中，我们将用到矩阵理论的一些结果①：

1． 实对称矩阵的所有特征值是实数，所有特征向量也都是实的。

2． 如果实对称矩阵有两个特征值 λ_1 和 λ_2 不相等，则相应的两个特征向量正交。

3． 对于任何实对称的 3×3 矩阵 $\mathbf{A}$，存在一个正交矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$ 成为对角矩阵，即

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix},$$

---

① 详细的证明参阅一般的线性代数教科书。

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 **A** 的特征值。

现在把这些数学结果用于惯量张量。特征方程(9.23)有三个实根，记作 J_1,J_2 和 J_3。有了特征根就可以求出相应的三个特征向量。于是我们得到以下的结论：经过刚体上的固定点 O，一定存在三个相互垂直的特征向量。与它们对应的单位向量记作 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$，相对于坐标架 $[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 刚体的惯量矩阵是对角矩阵，即有

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}.$$

所以特征向量的方向就是惯量椭球的主方向。

如果 J_1,J_2,J_3 互不相等，那么三个主方向是唯一确定的；如果 $J_1=J_2\neq J_3$，这时惯量椭球是一个旋转椭球，那么相应于 J_3 的主方向 $\boldsymbol{e}_3$ 是唯一确定的，而在垂直于 $\boldsymbol{e}_3$ 的平面内任何两个互相垂直的方向都可以取作主方向 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$；如果 $J_1=J_2=J_3$，此时惯量椭球是一个圆球，则任何方向都是主方向，相应的张量叫球张量。

有时又可以根据对称性确定主轴，这可能有以下几种情况：

1. 如果均质刚体有一对称轴，则它一定是该轴上任意一点的惯量主轴。取此轴为 ζ 轴，由于对称性，刚体上如有一个坐标为 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的质点，则必有一个坐标为 $(-\xi_i,-\eta_i,\zeta_i)$ 的质点，因此按定义有

$$J_{\eta\zeta}=0,\qquad J_{\zeta\xi}=0,$$

即 ζ 轴是刚体上 O 点的惯量主轴。通过质心的惯量主轴叫做**中心惯量主轴**，简称**中心主轴**。显然，刚体的对称轴同时也是中心主轴。

2. 如果均质刚体有一对称平面 S，则垂直于此平面的任意直线必是此直线与平面 S 之交点 O 的惯量主轴。取此直线为 ζ 轴，O 点为坐标原点，则根据对称性必有

$$J_{\eta\zeta}=0, \qquad J_{\xi\zeta}=0.$$

因此 $O\zeta$ 轴为刚体关于 O 点的惯量主轴。

3． 如果刚体是均质旋转体，则旋转轴必是中心主轴。这是因为旋转轴是对称轴，由上面第 1 点，结论是显然的。另外通过旋转轴的任意平面都是对称平面，因此垂直于这个平面的任意轴均为主轴，即垂直于旋转轴的任意轴均是主轴。

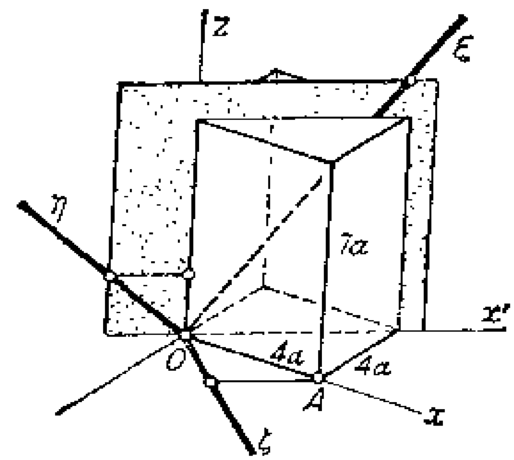


图9.15 求长方体对 O 的主轴

例 9.8 均质长方体三边长分别为 $4a, 4a$ 和 $7a$，质量为 m。求它对于一顶点的主惯量及相应的主方向（图 9.15）。

解 取坐标系 $Oxyz$ 如图，利用例 9.3 的结果，在 $Oxyz$ 中的惯量和惯积是

$$J_x=J_y=\frac{1}{3}m[(4a)^2+(7a)^2]=\frac{65}{3}ma^2,$$

$$J_z=\frac{1}{3}m[(4a)^2+(4a)^2]=\frac{32}{3}ma^2,$$

$$J_{xy}=4ma^2, \qquad J_{yz}=J_{zx}=7ma^2.$$

所以惯量矩阵是

$$\mathbf{J}=\frac{ma^2}{3}\begin{bmatrix} 65 & -12 & -21 \\ -12 & 65 & -21 \\ -21 & -21 & 32 \end{bmatrix}.$$

设 $\mathbf{J}$ 的特征值为

$$\lambda=\rho\, ma^2/3,$$

则 ρ 应满足

$$\begin{vmatrix} 65-\rho & -12 & -21 \\ -12 & 65-\rho & -21 \\ -21 & -21 & 32-\rho \end{vmatrix}=0,$$

或

$$\rho^3-162\rho^2+7359\rho-62678=0.$$

上述方程的根是 11，74 和 77。即主惯量分别为 $J_1=11ma^2/3$，$J_2=74ma^2/3$，$J_3=77ma^2/3$。相应于 J_1 的主轴取为 $O\xi$ 轴，这个主方向的方向数(p,q,r)由以下齐次方程确定

$$\begin{cases}(65-11)p-12q-21r=0,\\ -12p+(65-11)q-21r=0,\\ -21p-21q+(32-11)r=0.\end{cases}$$

由此解出

$$p:q:r=1:1:2,$$

即 $(1,1,2)$ 是一个特征向量，主轴 $O\xi$ 的方向余弦为 $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$，对应于主惯量 $J_\xi=J_1=11ma^2/3$。如果刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 沿 $O\xi$ 方向，那么动量矩 $\mathbf{G}$ 也沿 $O\xi$ 方向，且

$$\mathbf{G}=J_1\boldsymbol{\omega}.$$

同样可求得其他两个主方向：对应于主惯量 $J_2=74ma^2/3$ 的主轴是 $O\eta$，其方向余弦是 $(-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$；对应于主惯量 $J_3=77ma^2/3$ 的主轴是 $O\zeta$，其方向余弦为 $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2},0)$。在选取 $O\zeta$ 轴的正向时，应注意使 $O\xi\eta\zeta$ 组成右手坐标系。

现在用坐标架旋转时惯量矩阵的变换公式进行核对。由上面的计算知道从坐标架 $Oxyz$ 到 $O\xi\eta\zeta$ 的变换矩阵是

$$\mathbf{P}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3}\\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{3}\\ 2 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}.$$

根据式(9.12)得到likely对于$O\xi\eta\zeta$的惯量矩阵为

$$\mathbf{J}'=\mathbf{P}^T\mathbf{J}\mathbf{P}=\frac{ma^2}{3}\begin{bmatrix}11 & 0 & 0\\ 0 & 74 & 0\\ 0 & 0 & 77\end{bmatrix}. \blacksquare$$

前面讲过，利用莫尔圆方法可以求平面情况转轴时张量分量的变换关系。如果把坐标架的空间转动分解成两次平面转动，那么莫尔圆方法可以推广用于空间转动情形。下面通过一个例题加以说明。

例 9.9 利用对称性和莫尔圆方法解例9.8。

解 过O点作一个对称平面$Ox'z$(见图 9.15和图 9.16)，而Oy'轴垂直于这个平面，所以Oy'轴是一根主轴。

可以先在Oxy平面上作坐标旋转(由Oxy到$Ox'y'$)，应用莫尔圆求出$J_{x'}$，$J_{y'}$。根据

$$J_x=J_y=\frac{65ma^2}{3},\qquad J_{xy}=\frac{12ma^2}{3}$$

画出莫尔圆如图9.16右上角所示(图中数据应乘$ma^2/3$)，得

$$J_{x'}=\frac{53ma^2}{3},\qquad J_{y'}=\frac{77ma^2}{3}.$$

设C是质心，由平行移轴定理得

$$J_{x'z}=m\left(\frac{1}{2}\sqrt{32a^2}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot 7a\right)=\frac{21\sqrt{2}\,ma^2}{3}.$$

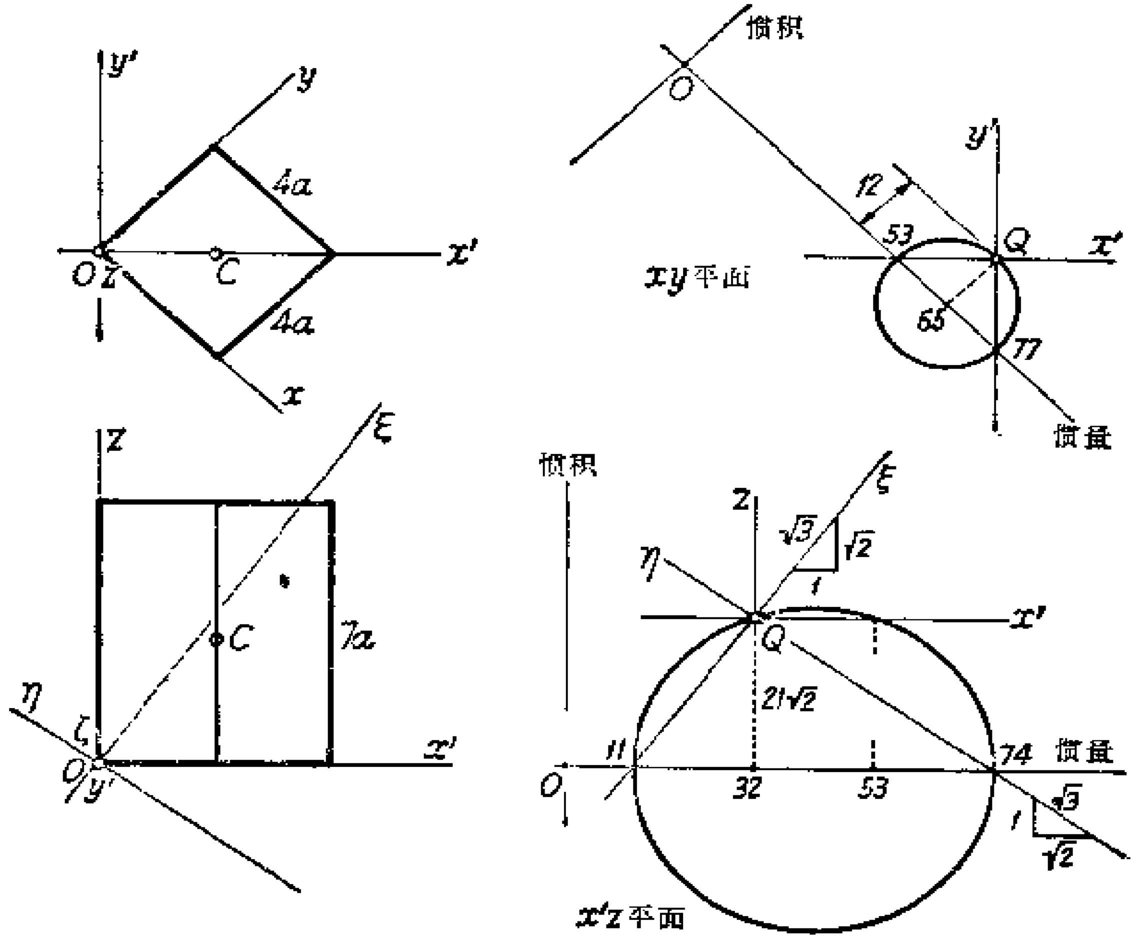


图9.16 用莫尔圆求主轴和主惯量

另外有

$$J_z=\frac{m}{3}\left[(4a)^2+(4a)^2\right]=\frac{32ma^2}{3}.$$

其次在 $Ox'z$ 平面内作坐标旋转(由 $Ox'z$ 到 $O\xi\eta$)，根据$J_{x'}$，J_z 及 $J_{x'z}$ 画出另一个莫尔圆如图 9.16 右下角所示，圆半径为

$$\frac{ma^2}{3}\sqrt{\left(\frac{53-32}{2}\right)^2+(21\sqrt{2})^2}=\frac{ma^2}{3}\cdot\frac{63}{2},$$

圆心的横坐标为

$$\frac{ma^2}{3}\left(\frac{53+32}{2}\right)=\frac{ma^2}{3}\left(\frac{85}{2}\right).$$

因此得出主惯量为

$$J_x=\frac{11ma^2}{3},\qquad J_y=\frac{74ma^2}{3}.$$

ξ轴与x'轴的夹角为$\mathrm{arc\ tg}\sqrt{2}$。这些与上例所得的结果是一致的。▎

若取刚体的主轴为固连坐标系，则刚体的动量矩和动能的表达式(9.4)及(9.6)就可以大为简化，它们分别是

$$\boldsymbol{G}=J_1\omega_1\boldsymbol{e}_1+J_2\omega_2\boldsymbol{e}_2+J_3\omega_3\boldsymbol{e}_3 \tag{9.24}$$

和

$$T=\frac{1}{2}(J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2+J_3\omega_3^2). \tag{9.25}$$

其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 是主轴方向的单位向量，它们组成右手系，ω_1，ω_2 和 ω_3 是角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 在固连坐标系中的分量，J_1,J_2 和 J_3 是相应的主惯量。在以后的讨论中一般就将坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 取在一组正交的主轴上，原点 O 就取在刚体定点运动的那个定点上。

例9.10 均质圆柱体的高和底圆直径相等，Oz 轴过圆柱体的中心 O 以及底圆的边缘上一点 A(图9.17)。当圆柱体绕 Oz 轴转动时，求动量矩向量 $\boldsymbol{G}$ 与角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 之间的夹角 α。

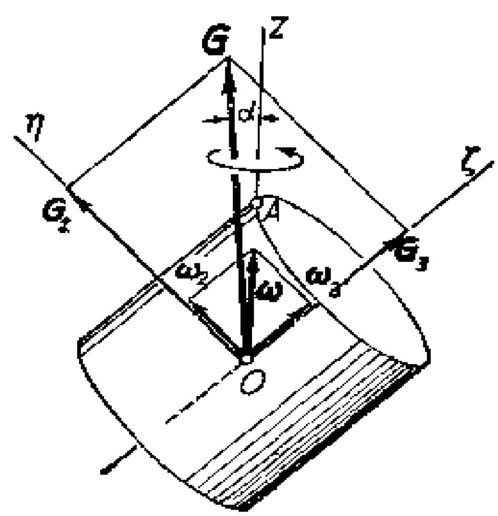


图9.17 求 $\boldsymbol{G}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 的夹角 α

解 对称轴 $O\zeta$ 是一主轴，惯量椭球是旋转椭球，另一主轴 $O\xi$ 可在垂直于 $O\zeta$ 的平面内任意选取。为简单起见取 $O\xi$ 轴垂直于 $Oz\zeta$ 平面(图中未画出)，$O\eta$ 在 $Oz\zeta$ 平面内。设圆柱体的质量为 m，高为 h，半径为 $h/2$，则可以算出三个主惯量为

$$J_1=J_2=7mh^2/48, \qquad J_3=mh^2/8,$$

即

$$J_1:J_2:J_3=7:7:6.$$

设沿 Oz 轴的角速度向量为 $\boldsymbol{\omega}$，则它在三个主轴方向的分量大小之比为

$$\omega_1:\omega_2:\omega_3=0:1:1.$$

所以动量矩 $\boldsymbol{G}$ 沿主轴分量大小之比为

$$G_1:G_2:G_3=J_1\omega_1:J_2\omega_2:J_3\omega_3=0:7:6.$$

由此可知 $\boldsymbol{G}$ 在 $Oz\zeta$ 平面内，与 ζ 轴夹角为 arc tg(7/6)，而 $\boldsymbol{G}$ 与 z 轴（就是 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向）的夹角为

$$\alpha=\text{arc tg}(7/6)-45°=4°24'.$$

由此可以看出一个有趣的结论，如果圆柱体绕 Oz 轴作定轴匀速转动，$\boldsymbol{G}$ 将画出一个锥面，此时 $d\boldsymbol{G}/dt$ 不等于零，这就是说即使是作定轴匀速转动，也必须有外力矩的作用才能维持。如果 Oz 轴与圆柱轴线 $O\zeta$ 重合，并保持圆柱体作匀速定轴转动，则不需要有外力矩作用，这是人们直观上容易理解的。那么，前后两种情况差别在哪里呢？请读者自己思考。▌

* * *　对于一个给定的刚体，在空间一切直线中，对哪一条的转动惯量最小？说出这条直线的具体求法。* * *

* * *　设有一旋转体，对称轴为 $O\zeta$。它绕一固定轴 Oz 以

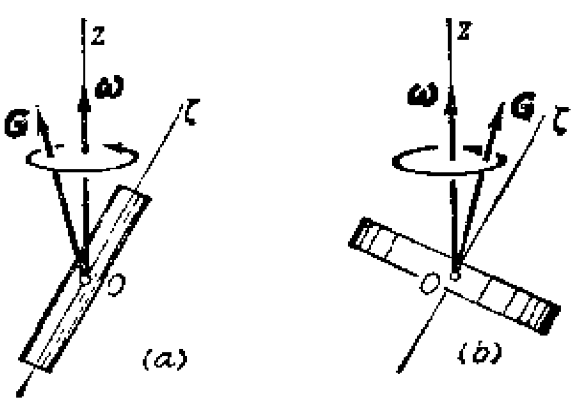


图9.18　定轴转动时的$\boldsymbol{G}$与 $\boldsymbol{\omega}$

角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 作定轴转动，Oz 轴与 $O\zeta$ 轴的夹角是锐角。说明为什么当物体是细长形时 $\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $O\zeta$ 之外（图 9.18(a)），而当物体是扁平形时 $\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $O\zeta$ 之间（图9.18(b)）。＊＊＊

9-4 刚体定点运动的动力学方程

设刚体绕固定点 O 运动，取 O 为坐标原点，右手直角固连标架 $[O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 与 O 点的主轴重合。于是动量矩和角速度之间的关系为

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.$$

应用动量矩定理 $d\boldsymbol{G}/dt = \boldsymbol{L}$，其中对 t 求导是相对惯性参考系的绝对导数，它与相对固连系的导数 $\widetilde{d}\,\boldsymbol{G}/dt$ 之间有关系式（见式(3.34)）

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt} = \frac{\widetilde{d}\,\boldsymbol{G}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{G},$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是固连坐标系的角速度，也就是刚体绕定点运动的瞬时角速度。于是动量矩定理可写成

$$\frac{\widetilde{d}\,\boldsymbol{G}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{G} = \boldsymbol{L}.$$

在固连坐标系 $[O, \boldsymbol{e}]$ 中可以得到三个分量方程

$$\boxed{\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = L_1 \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = L_2 \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = L_3 \end{cases}} \qquad (9.26)$$

这就是刚体定点运动的动力学方程，称为**欧拉方程**。应该注意，在利用这个方程时，所取的标架必须是过刚体上的定点 O 且方向

和主轴一致的固连标架。如果取其他的坐标架，比如固定坐标架或任意的别的固连坐标架，则所得动力学方程在形式上都不能象这样简单。

欧拉方程是 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ （时间 t 的函数）的一组非线性微分方程。即使力矩 L_1,L_2,L_3 很简单，这组方程的分析解的求法也是比较复杂的。历史上曾经引起了许多数学家和力学家的兴趣，但也只能对某些特殊情况作出完整的解答。下面分别对几种典型情况进行一些讨论，更详细的研究可以参考有关的专著。

（一）不受外力矩作用的情况（欧拉情况）

设 $\boldsymbol{L}=0$，这时欧拉方程为

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1+(J_3-J_2)\omega_2\omega_3=0, \\ J_2\dot{\omega}_2+(J_1-J_3)\omega_3\omega_1=0, \\ J_3\dot{\omega}_3+(J_2-J_1)\omega_1\omega_2=0. \end{cases}$$

由此可以得出两个首次积分。将以上三式分别乘以 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$，然后相加并积分得

$$J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2+J_3\omega_3^2=\text{常量}。\tag{9.27}$$

这就是机械能守恒的结果，因为左端正好是动能的两倍，而势能恒为零。将欧拉方程中的三式分别乘以 $J_1\omega_1,J_2\omega_2,J_3\omega_3$，然后相加并积分得

$$J_1^2\omega_1^2+J_2^2\omega_2^2+J_3^2\omega_3^2=\text{常量}。\tag{9.28}$$

等号左边正好是动量矩 $\boldsymbol{G}$ 的大小的平方，这说明动量矩的大小守恒。值得注意的是因为 $\boldsymbol{L}=0$，所以在惯性系中动量矩守恒，即 $\boldsymbol{G}=$常向量。因为现在的固连标架本身是动的，所以 G_1,G_2,G_3并不是常量，只能得到

$$G^2=G_1^2+G_2^2+G_3^2=\text{常量}。$$

利用这两个首次积分，方程组的阶数虽然降低了，但要进一

步求出未知函数 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 还是比较复杂的。在 J_1,J_2,J_3 互不相等时（即惯量椭球是三轴椭球时），解不能用初等函数表示出来，而要采用椭圆函数①。

在力学的发展历史中，分析方法和几何方法曾经起着独立的作用②，但两种方法往往彼此渗透。对于刚体定点运动的欧拉情况的几何解释就是一个范例，这是由潘索(Poinsot)在十九世纪给出的。

由欧拉方程可知，如果有两个刚体，虽然它们的具体形状是不相同的，但是它们的三个主惯量 J_1,J_2,J_3 是一样的，那么它们的动力学过程将由同一个欧拉方程所描述。因此在讨论动力学问题时，我们对刚体的具体形状并不关心，而把注意力集中在惯量椭球上，对刚体本身采取"得其精而忘其粗，在其内而忘其外，见其所见，不见其所不见"的态度③，用惯量椭球来代表刚体，椭球的方程为

$$J_1\xi^2+J_2\eta^2+J_3\zeta^2=\text{常量。} \tag{9.29}$$

这个椭球体的中心是固定点 O，只要知道其主轴 $O\xi,O\eta,O\zeta$ 在空间怎样运动也就知道了刚体在空间作怎样的运动。如果把椭球面方程(9.29)右端的常量取成动能的两倍，即$2T$④，并且将式(9.29)与(9.27)进行比较，则向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的端点 S 正好时刻都在惯量椭球的表面上（图9.19）。

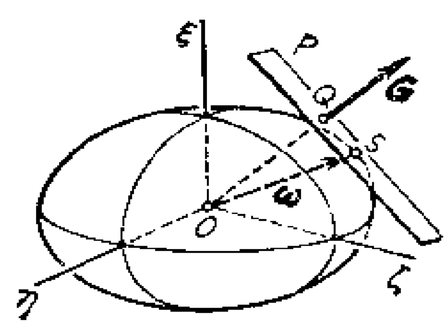


图9.19 $\boldsymbol{L}=0$ 时刚体运动的几何解释

由解析几何可知，在椭球面上 S 点处的切平面 P 的方程为

---

① 参阅H.H.蒲赫哥尔茨《理论力学基本教程》中译本下册第四章§7。

② 在近代，由于电子计算机的发展，数值计算方法也迅速得到发展。可以利用电子计算机对刚体及多刚体系统的动力学问题进行计算分析。

③ 语出《列子》中九方皋相马的故事。

④ 当常量取得不同时，椭球面的大小按比例放大或缩小，如图9.14那样。

$$J_1\omega_1\xi+J_2\omega_2\eta+J_3\omega_3\zeta=2T.$$

从O点到切平面P的距离为

$$\overline{OQ}=\frac{2T}{\sqrt{(J_1\omega_1)^2+(J_2\omega_2)^2+(J_3\omega_3)^2}}$$

$$=\frac{2T}{G}=\text{常量}.$$

切平面P的法线OQ的方向数是$J_1\omega_1, J_2\omega_2, J_3\omega_3$，即$G_1, G_2, G_3$。所以$OQ$的方向就是动量矩$\boldsymbol{G}$的方向，因为动量矩守恒，$\boldsymbol{G}$在空间是不变的。由此可以断定切平面$P$是惯性空间中的固定平面，它只与初条件（当初条件给定以后，$\boldsymbol{G}$和T就定下来了）有关，称为**不变平面**。所以，不受外力矩的定点刚体，在运动过程中，它的惯量椭球面总是和不变平面P相切，由固定点到切点的向量代表角速度向量。

刚体在运动时，角速度向量在空间划出一个定锥面，同时在刚体上划出一个动锥面(参见3-5中图3.45)，而且动锥面在定锥面上作纯滚动。

例9.11 分析$J_1=J_2>J_3$，定点刚体不受外力矩时的运动。

解 欧拉方程为

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1-(J_1-J_3)\omega_2\omega_3=0, \\ J_1\dot{\omega}_2+(J_1-J_3)\omega_1\omega_3=0, \\ J_3\dot{\omega}_3=0. \end{cases}$$

由第三式立刻得出$\omega_3=$常量，代入第一及第二式，解得

$$\omega_1=A_1\cos\left(\frac{J_1-J_3}{J_1}\omega_3t+B_1\right),$$

$$\omega_2=A_2\sin\left(\frac{J_1-J_3}{J_1}\omega_3t+B_2\right).$$

由此可知，如果将角速度$\boldsymbol{\omega}$分解为沿ζ轴和垂直于ζ轴的两个分量$\omega_3\boldsymbol{e}_3$和$\boldsymbol{\omega}'$，则这两个分量的大小都不变，而垂直分量$\boldsymbol{\omega}'$在赤道平面$O\xi\eta$中作旋转，其相对角速度大小为$(J_1-J_3)\omega_3/J_1$。所以$\boldsymbol{\omega}$的端点S在惯量椭球的表面上画出一个纬圆C_1（注意这个椭球体本身是在运动的），同时$\boldsymbol{\omega}$的端点S在不变平面P上也画出一个圆C_2(图9.20(a))，C_2的圆心在Q点。C_1和C_2分别是本体极迹和空间极迹。定锥面和动锥面都是正圆锥体(图 9.20(b))。▌

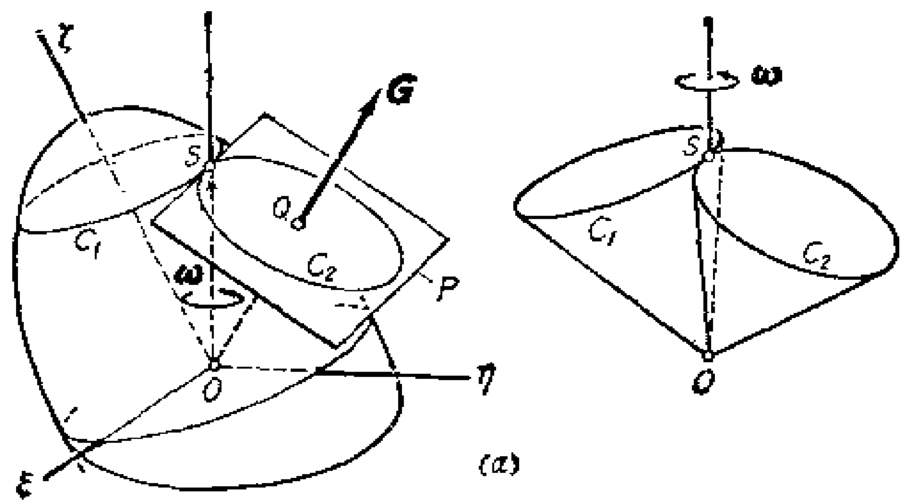


图9.20 旋转椭球体的本体极迹和空间极迹

对于J_1,J_2,J_3互不相等的情况，$\boldsymbol{\omega}$端点在椭球面上画出的轨迹不再是平面曲线。设取定一个动能值T，对于不同的动量矩值G，$\boldsymbol{\omega}$的端点轨迹，即本体极迹是椭球面和曲面

$$J_1^2\xi^2+J_2^2\eta^2+J_3^2\zeta^2=G^2$$

的交线，它们可能的图形如图9.21所示。图中ξ,η,ζ是主轴，相应的主惯量是J_1,J_2,J_3，

$$OA=\sqrt{\frac{2T}{J_1}},\quad OB=\sqrt{\frac{2T}{J_2}},\quad OC=\sqrt{\frac{2T}{J_3}}.$$

图中 $OA<OB<OC$，故有 $J_1>J_2>J_3$。

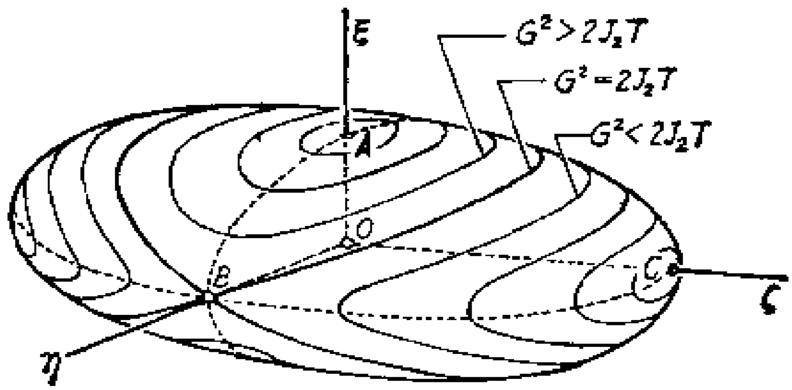


图9.21　惯量椭球面上的本体极迹

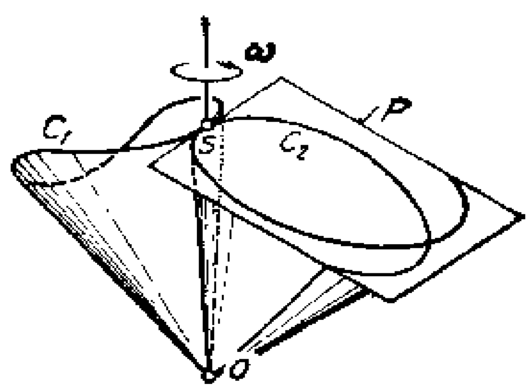


图9.22　本体极迹和空间极迹

在刚体运动过程中，这个椭球面和不变平面始终相切，一般说来，切点在椭球面上画出的本体极迹 C_1 是闭合的曲线，但不是平面曲线；切点在不变平面上画出的空间极迹 C_2 是平面曲线，但一般不闭合(图9.22)。

如果在初始时刻刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 沿图9.21中的 $\overrightarrow{OA}$ 时，则在以后的运动中 $\boldsymbol{\omega}$ 的端点将保持在 A 点，而且在受到微小扰动后，$\boldsymbol{\omega}$ 的端点还是在 A 点附近运动，这说明刚体绕最大惯量对应的主轴 ξ 的转动是稳定的。同样，刚体绕最小惯量对应的主轴 ζ 的转动也是稳定的。但是，对于中间主惯量 J_2 所对应的主轴 η 轴来说，刚体的转动是不稳定的。因为若在开始时 $\boldsymbol{\omega}$ 是图9.21中的 $\overrightarrow{OB}$，一旦受到微小的扰动后 $\boldsymbol{\omega}$ 的端点将远离 B 点，也就

是刚体在空间将作大幅度的运动。这可用一本书作简单的试验如下：

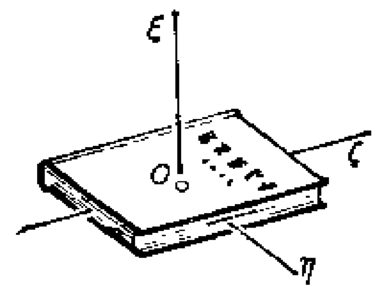


图9.23 沿书的主轴转动是否稳定？

把一本书用橡皮筋箍住使它不能随便翻开，将书在绕某一根主轴（图9.23）转动的同时向上抛起。注意观察它在运动过程中转轴的方向是否稳定。对于惯量最大的主轴 $O\xi$ 或惯量最小的主轴 $O\zeta$ 来说，转轴方向基本上不变，而对于 $O\eta$ 轴来说情况就大不相同了。在这个试验中书是相对于质心参考系作定点运动的。

例9.12 用欧拉方程分析上面所说刚体绕主轴转动的稳定性。

解 刚体绕惯量为 J_3 的主轴转动时，

$$\omega_1=0,\ \omega_2=0,\ \omega_3=\text{常量}\neq 0.$$

设它受到扰动，ω_1,ω_2 将不再是零。我们来分析在受扰动的运动中，如果 ω_1 和 ω_2 初始时是小量，在运动过程中它们是否仍然是小量。

欧拉方程的第一及第二式是

$$J_1\dot{\omega}_1+(J_3-J_2)\omega_3\omega_2=0,$$

$$J_2\dot{\omega}_2+(J_1-J_3)\omega_1\omega_3=0.$$

将两式分别乘以 $(J_3-J_1)\omega_1$ 和 $(J_3-J_2)\omega_2$，相加，并对时间积分，可得出一个首次积分①

$$J_1(J_3-J_1)\omega_1^2+J_2(J_3-J_2)\omega_2^2=\text{常量},$$

式中常量由 ω_1,ω_2 的初始值确定，它是一个小量。

如果 J_3 是三个主惯量中最大的一个（或是最小的一个），那么 $J_1(J_3-J_1)$ 和 $J_2(J_3-J_2)$ 同为正（或同为负）。上面的首次积分

① 也可由能量积分(9.27)和动量矩积分(9.28)导出。

说明在任何时候ω_1和ω_2都是小量。再从刚体能量积分(9.27)式

$$J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2+J_3\omega_3^2=\text{常量},$$

可见运动中ω_3的变化也将是小量。刚体绕最大或最小惯量主轴的转动是稳定的。▌

（二）刚体绕固定轴作匀速转动时的外力矩

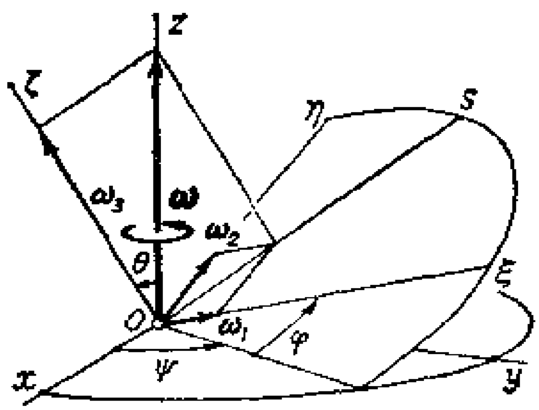


图9.24 刚体$O\xi\eta\zeta$绕固定轴Oz转动

设刚体绕固定轴Oz作匀速转动，角速度$\boldsymbol{\omega}$为常向量。如果定轴是主轴之一，那么动量矩是$J_z\boldsymbol{\omega}$。根据动量矩定理可知，外力矩恒等于零，即刚体在沒有外力矩作用时可以一直等速地转下去。

现在考虑过O的主轴$O\xi, O\eta$和$O\zeta$不与固定轴Oz重合的情况。取欧拉角如图9.24所示。章动角$\theta=$常量，自转角$\varphi=$常量，进动角的变化率$\dot{\psi}=\omega=$常量。于是$\boldsymbol{\omega}$在$O\xi\eta\zeta$上的投影是

$$\begin{cases}\omega_1=\omega\sin\theta\sin\varphi,\\ \omega_2=\omega\sin\theta\cos\varphi,\\ \omega_3=\omega\cos\theta,\end{cases}$$

并有$\dot{\omega}_1=\dot{\omega}_2=\dot{\omega}_3=0$。代入欧拉方程(9.26)得到

$$\begin{cases}L_1=(J_3-J_2)\omega^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi,\\ L_2=(J_1-J_3)\omega^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi,\\ L_3=(J_2-J_1)\omega^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi.\end{cases}\tag{9.30}$$

这就是保持刚体作匀速定轴转动所需的外力矩$\boldsymbol{L}$在三根主轴上的分量。

在特殊情况下，如果$J_1=J_2$，则因为$L_3=0$，力矩可以写成

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= L_1\boldsymbol{e}_1+L_2\boldsymbol{e}_2 \\
&= (J_3-J_2)\omega^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\ \boldsymbol{e}_1-(J_3-J_1)\omega^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\ \boldsymbol{e}_2 \\
&= (J_3-J_1)\omega^2\sin\theta\cos\theta\ \boldsymbol{n}^0,
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{n}^0=\cos\varphi\ \boldsymbol{e}_1-\sin\varphi\ \boldsymbol{e}_2$ 是节线方向的单位向量。

由此可知，当$J_3>J_1$时，外力矩$\boldsymbol{L}$的指向是由z轴转向ζ轴的右手螺旋方向，如图9.25所示。

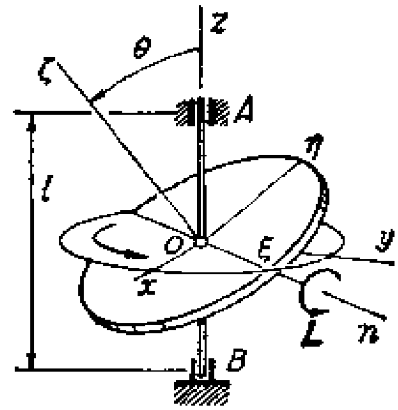


图9.25 $J_1=J_2<J_3$时匀速定轴转动所需的力矩$\boldsymbol{L}$

在机械设计中，转动部件通常是轴对称的，由于制造误差或者装配误差，使得主轴$O\zeta$与固定转轴Oz不重合，两者之间的夹角θ通常是很小的。但由于力矩大小L与ω^2成比例，因而对于高速转动的部件，L值仍然可能很大。外力矩$\boldsymbol{L}$与轴承A与B处的约束反力有关，反过来说轴承就受到很大的动压力。为了减少或消除这种动压力，在机械制造中，进行装配或试车时，必须进行“动平衡[①]”试验，其目的是尽量使主轴与固定转轴重合。

＊＊＊ 在以上的讨论中，当$J_1=J_2$时，如取节线On为x轴，求证

$$\boldsymbol{L}=J_{yz}\,\omega^2\,\boldsymbol{i},$$

其中J_{yz}是关于y，z轴的惯积，O_{xyz}是右手正交坐标系。＊＊＊

① 动平衡是相对于“静平衡”而言的。在机械制造中，静平衡试验的目的是使转动部件的重心位于转动轴上。

（三）在莱沙尔坐标系中刚体的动力学方程

当 $J_1=J_2$ 时，可以引进一种新的坐标系来讨论刚体定点运动的动力学方程。需要注意的是 $J_1=J_2$ 表示刚体的惯量椭球是对 $O\zeta$ 轴对称的旋转椭球，但是 $J_1=J_2$ 并不一定要求刚体本身的形状是旋转对称的。

莱沙尔① 坐标架 $Ons\zeta$ 是右手坐标系 $[O,\boldsymbol{n}^0,\boldsymbol{s}^0,\boldsymbol{e}_3]$，其中 $\boldsymbol{n}^0$ 是节线方向的单位向量，$\boldsymbol{e}_3$ 就是前面所说的与 J_3 对应的主轴的单位向量，$\boldsymbol{s}^0=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{n}^0$，如图9.26。

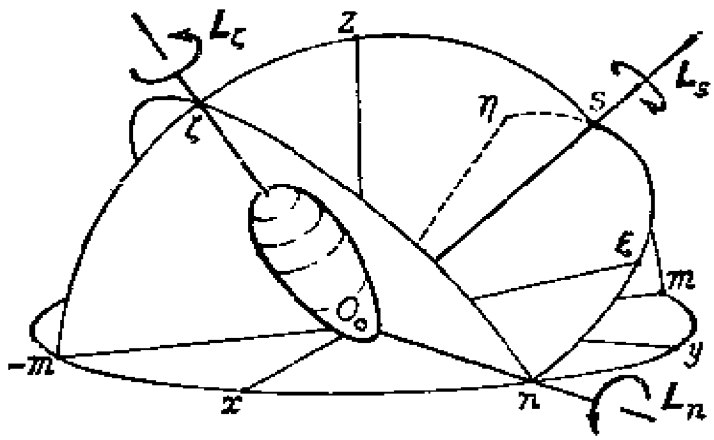


图9.26　莱沙尔坐标架 $Ons\zeta$

莱沙尔坐标系是一种活动的坐标系，其特点是它本身相对惯性系是活动的，而刚体在这个坐标系中作定轴转动。刚体的运动可以分解成进动、章动和自转，莱沙尔标架的运动包含了刚体的进动和章动两部分。

将莱沙尔坐标架相对惯性系的角速度记作

$$\boldsymbol{\Omega}=\dot{\psi}\,\boldsymbol{k}+\dot{\theta}\,\boldsymbol{n}^0,$$

它在标架 $[O,\boldsymbol{n}^0,\boldsymbol{s}^0,\boldsymbol{e}_3]$ 上的投影为 $[\dot{\theta},\dot{\psi}\sin\theta,\dot{\psi}\cos\theta]$。刚体

---

① Henri Resal (1828—1896)，法国人。

的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在莱沙尔坐标系上的投影为

$$[\dot{\theta}, \dot{\psi}\sin\theta, \dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}]。$$

由于 $J_1=J_2$，所以 On 与 Os 也是主轴，于是动量矩 $\boldsymbol{G}$ 在莱沙尔坐标系上的投影为

$$[J_1\dot{\theta}, J_1\dot{\psi}\sin\theta, J_3(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})],$$

$\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{G}$ 的投影分别是

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{G})_n=J_3\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})-J_1\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta,\\ (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{G})_s=J_1\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta-J_3\dot{\theta}(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}),\\ (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{G})_\zeta=0。\end{cases}$$

外力对O点的主矩 $\boldsymbol{L}$ 的投影写成 $[L_n, L_s, L_\zeta]$，其中 L_ζ 就是前面所说的 L_3。

根据动量矩定理，有

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{G}}{dt}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{G}=\boldsymbol{L},$$

可得出三个投影式

$$\begin{cases}J_1\ddot{\theta}-J_1\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta+J_3\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})=L_n,\\ J_1\ddot{\psi}\sin\theta+2J_1\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta-J_3\dot{\theta}(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})=L_s,\\ J_3\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})=L_\zeta。\end{cases}\tag{9.31}$$

这就是当 $J_1=J_2$ 时，刚体定点运动的动力学方程在莱沙尔坐标系上的投影式，它比欧拉方程进了一步，是直接用欧拉角表示出来的。

（四）重力作用下轴对称刚体的定点运动（拉格朗日情况）

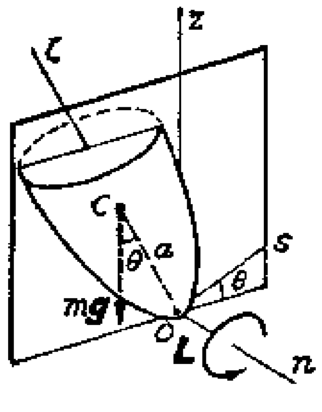


图9.27 玩具陀螺

图9.27所示的玩具陀螺在地面上的运动接近于这种情况。设支承点O是固定点，除支承反力和重力外无其他外力作用。这种理论模型的动力学研究在理论上和应用上都有重要意义。

设C是质心，距离$OC=a$。取z轴竖直向上，忽略支承点处的摩擦力矩和空气阻力，则外力矩

$$\boldsymbol{L}=mga\sin\theta\ \boldsymbol{n}^0,$$

它在莱沙尔坐标系上的投影为$[mga\sin\theta,0,0]$。代入动力学方程（9.31），并由此得出三个首次积分如下：

由第三式得出角速度在对称轴ζ上的分量为常量，即

$$\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}=\omega_3(\text{常量})。\tag{9.32}$$

将它代入第二式并乘以积分因子$\sin\theta$，可得出第二个首次积分

$$J_1\dot{\psi}\sin^2\theta+J_3\omega_3\cos\theta=G_z(\text{常量})。\tag{9.33}$$

G_z的物理意义是动量矩$\boldsymbol{G}$在z轴上的投影。上式也可以直接从动量矩守恒定理得出，因为在运动过程中$L_z\equiv 0$，而Oz轴是惯性空间中的固定轴。

由第一式乘$\dot{\theta}$，第二式乘$\dot{\psi}\sin\theta$，两者相加得

$$J_1\dot{\theta}\ddot{\theta}+J_1\dot{\psi}^2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta+J_1\dot{\psi}\ddot{\psi}\sin^2\theta-mga\dot{\theta}\sin\theta=0。$$

由此得到第三个首次积分

$$\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}J_1\dot{\psi}^2\sin^2\theta+mga\cos\theta=h(\text{常量})。\tag{9.34}$$

这个首次积分相当于机械能守恒，因为容易证明有关系式

$$\text{动能}+\text{势能}=\text{式(9.34)左端}+\frac{1}{2}J_3\omega_3^2。$$

由式(9.33)和(9.34)可以解出运动规律 $\theta=\theta(t)$ 和 $\psi=\psi(t)$，但是要利用椭圆函数来表达。

下面我们只分析章动角 θ 的变化情况。由式(9.33)和(9.34)消去 $\dot{\psi}$，经过一些运算后可得

$$(\dot{\theta}\sin\theta)^2=2\frac{h-mga\cos\theta}{J_1}\sin^2\theta-\left(\frac{G_z-J_3\omega_3\cos\theta}{J_1}\right)^2.$$

引入新变量 $u=\cos\theta$（u 是单位向量 e_3 的端点的高度），则 $\dot{u}=-\dot{\theta}\sin\theta$，上式可以写成

$$\dot{u}^2=(\alpha-\beta u)(1-u^2)-(\gamma-\delta u)^2, \tag{9.35}$$

其中

$$\alpha=2h/J_1,\ \beta=2mga/J_1,\ \gamma=G_z/J_1,\ \delta=J_3\omega_3/J_1,$$

它们都是由刚体的参数和初条件决定的常量。

令上式右端为 $f(u)$，即

$$f(u)\equiv(\alpha-\beta u)(1-u^2)-(\gamma-\delta u)^2,$$

它是 u 的一个三次多项式。于是有

$$\dot{u}=\pm\sqrt{f(u)}.$$

对应于真实的运动 $\dot{u}$ 应该是实数，与此对应的 $f(u)$ 不能为负值。又因为 $u=\cos\theta$，故只能在 $u=-1$ 和 $u=+1$ 之间考虑 $f(u)$ 的值。在此范围内 $f(u)$ 不能全部取负值，否则就不存在真实的运动。

设在起始时刻 $\theta=\theta_0$，相应地有 $u_0=\cos\theta_0$。因为 $\dot{u}^2(0)\geqslant 0$，故 $f(u_0)\geqslant 0$。另外可以验证有

$$f(-\infty)<0,\quad f(-1)\leqslant 0,\ f(+1)\leqslant 0,\ f(+\infty)>0.$$

因此可以断定三次方程 $f(u)=0$ 的三个根 u_1, u_2 和 u_3 必有关系

$$-1\leqslant u_1\leqslant u_0\leqslant u_2\leqslant +1\leqslant u_3<+\infty.$$

下面分别几种可能的情况进行讨论。

（1）三根互不相等的情况。这时有 $u_1 < u_0 < u_2 < +1 < u_3$（图9.28(a)）。设与 u_1 和 u_2 对应的 θ 值为 θ_1 和 θ_2。因为真实的运动对应于 $f(u) \geqslant 0$，所以刚体在运动过程中章动角 θ 将被限

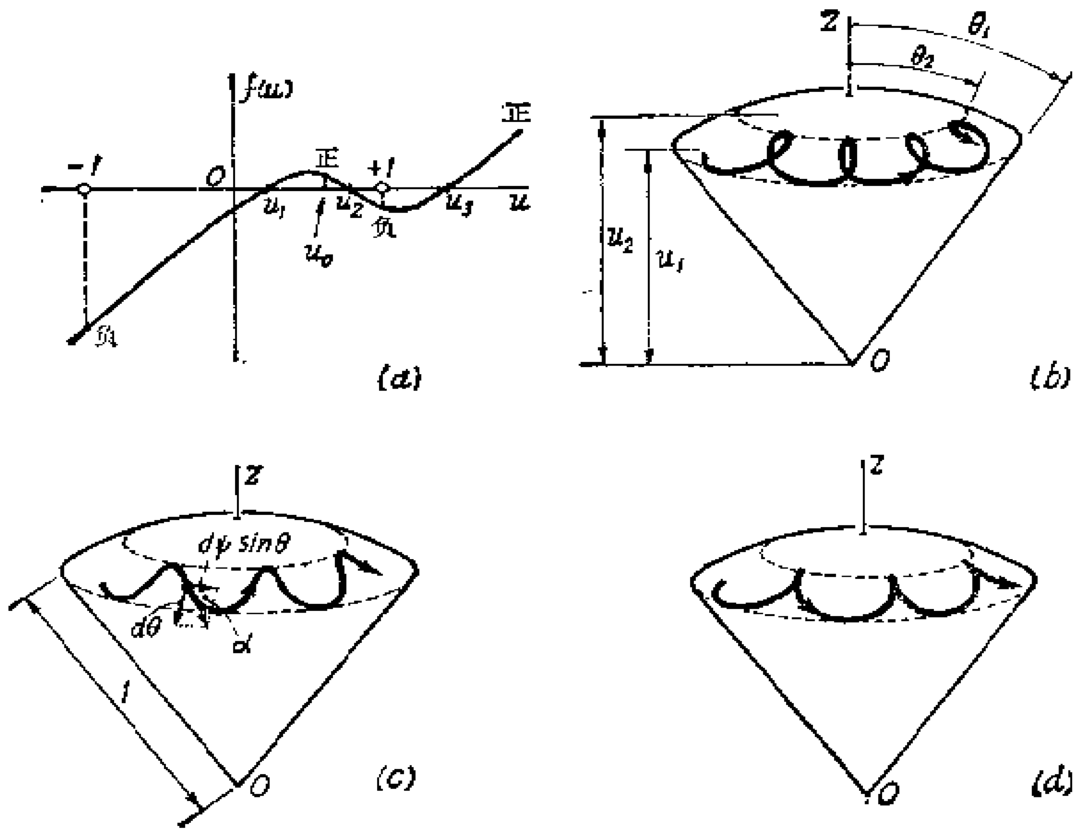


图9.28 无重根时 e_3 端点的轨迹

制在以下范围内：

$$\theta_2 \leqslant \theta \leqslant \theta_1,$$

即刚体对称轴 ζ 上的单位向量 e_3 的端点在单位球面上的轨迹，

将被限制在平面 $z=u_1$ 和 $z=u_2$ 在单位球面上截出的两个圆之间。三种可能的运动情况如图9.28(b),(c),(d)所示，究竟属于哪一种情况由初条件确定。

由式(9.33)得

$$\dot{\psi}=\frac{G_z-J_3\omega_3\cos\theta}{J_1\sin^2\theta}=\frac{\delta}{\sin^2\theta}\left(\frac{\gamma}{\delta}-u\right)。\qquad(9.36)$$

在单位球面上（图9.28(c)）经线的微弧长 $1\cdot d\theta$ 与纬线的微弧长 $d\psi\sin\theta$ 之比为

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{d\theta}{d\psi\sin\theta}=\frac{\dot{\theta}}{\dot{\psi}\sin\theta}=\mp\frac{\sqrt{f(u)}}{\gamma-\delta u}。\qquad(9.37)$$

如果初条件给出

$$u_1<\frac{\gamma}{\delta}=\frac{G_z}{J_3\omega_3}<u_2,$$

则当刚体运动达到 $u=u_1$ 时，$\dot{\psi}>0$。因为在 $u=u_1$ 时 $\dot{\theta}=0$，所以

$$\operatorname{tg}\alpha|_{\theta_1}=0。$$

这说明在 $u=u_1$ 处 e_3 端点的轨迹与 u_1 对应的纬度圆相切，并且端点向右运动。当刚体运动达到 $u=u_2$ 时，$\dot{\psi}<0$。同理有

$$\dot{\theta}|_{\theta_2}=0,\quad \operatorname{tg}\alpha|_{\theta_2}=0,$$

所以在 $u=u_2$ 处 e_3 端点的轨迹与 u_2 对应的纬度圆相切，而端点向左运动。这种初条件下的运动如图9.28(b)所示。

如果初条件给出 $\gamma/\delta>u_2$，则始终有 $\dot{\psi}>0$，而且

$$\operatorname{tg}\alpha|_{\theta_1\text{或}\theta_2}=0。$$

这说明 e_3 端点的轨迹与 u_1 和 u_2 对应的纬度圆相切。这种初条件下的运动如图9.28(c)所示。如果初条件给出 $\gamma/\delta<u_1$，则 $\dot{\psi}<0$，只要把图9.28(c)中运动箭头反过来就行。

如果初条件给出 $\gamma/\delta=u_2$，则 $\dot{\psi}\geqslant 0$，且当 $u=u_2$ 时有

$$\dot{u}^2|_{\theta_2}=(\alpha-\beta u_2)(1-u_2^2)-(\gamma-\delta u_2)^2$$
$$=(\alpha-\beta u_2)(1-u_2^2)=0.$$

由此得出 $u_2=\gamma/\delta=\alpha/\beta$，所以有

$$\dot{u}^2=(\gamma-\delta u)\left[\frac{\beta}{\delta}(1-u^2)-(\gamma-\delta u)\right].$$

将式(9.36)代入式(9.37)，再利用上式有

$$\operatorname{tg}\alpha|_{\theta_2}=\pm\sqrt{\frac{\beta(1-u^2)-\delta(\gamma-\delta u)}{\delta(\gamma-\delta u)}}\Bigg|_{\theta_2}=\pm\infty,$$

而

$$\operatorname{tg}\alpha|_{\theta_1}=0.$$

因此 e_3 端点的轨迹在 $u=u_1$ 处与纬度圆相切，在 $u=u_2$ 处与纬度圆正交。这种初条件下的运动如图9.28(d)所示。

任意初条件都不会有 $\gamma/\delta=u_1$。

（2）**出现二重根的情况。**这又可能出现 $u_1=u_2$ 和 $u_2=u_3$ 两种情况。

当 $u_1=u_2$ 时，必有 $u_0=u_1$（图9.29(a)）。对应的刚体运动

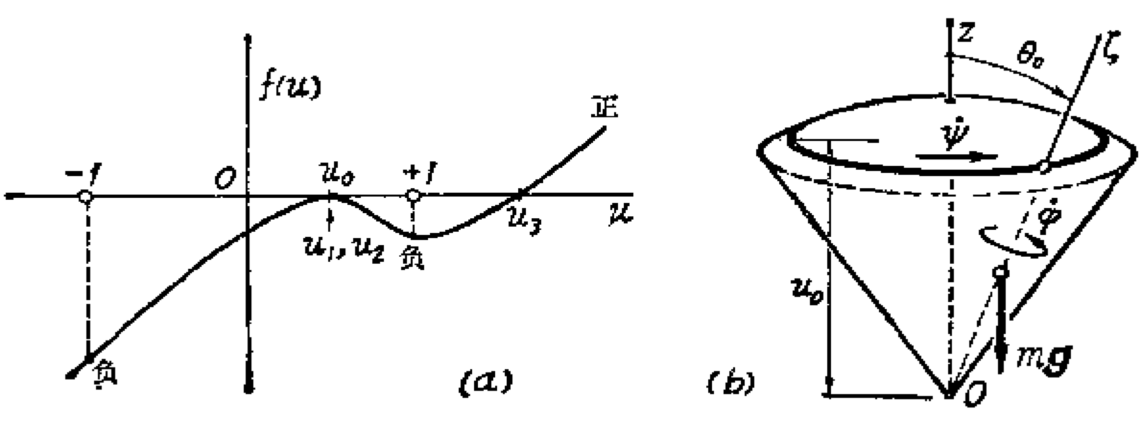


图9.29 规则进动

有$\theta=\theta_0$，$\dot{\psi}>0$（当$\gamma/\delta>u_0$时，如图9.29(b)所示。当$\gamma/\delta<u_0$时，$\dot{\psi}<0$，图中未画出），即章动角θ保持不变，进动角速度$\dot{\psi}$保持常值。这种运动叫做**规则进动**。

当$u_2=u_3$时，必有$u_2=1$（图9.30(a)）。此时方程（9.35）的形式为

$$\dot{u}^2=(1-u)^2(A+Bu).$$

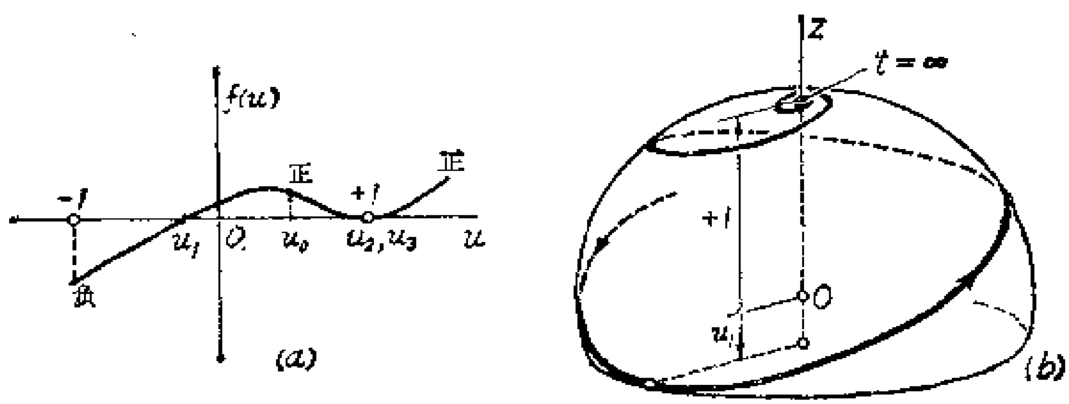


图9.30 另一种二重根的情况

比较系数，可得

$$A=\alpha-\gamma^2,\quad B=\beta=\alpha,\quad \gamma=\delta.$$

所以

$$\dot{u}^2=(1-u)^2(\alpha-\gamma^2+\alpha u).$$

令

$$b=2-\frac{\gamma^2}{\alpha}.$$

则有

$$\dot{u}^2=\alpha(1-u)^2(b-1+u),$$

即

$$\dot{u}=\pm(1-u)\sqrt{\alpha(b-1+u)}.$$

令 $\xi^2=b-1+u$，积分上式（设$\xi_0=\sqrt{b-1+u_0}$），有

$$\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{2d\xi}{(b-\xi^2)}=\pm\sqrt{a}\,t.$$

因为 $\dot{u}^2\geqslant 0$，故 $b-1+u\geqslant 0$。又 $1\geqslant u\geqslant -1$，所以有 $b>0$（当 $b=0$ 时，出现三重根的情况，见下面的分析）。积分上式得

$$u=1-b+b\cdot \mathrm{th}^2\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{ab}\,t+\mathrm{Ar\ th}\frac{\xi_0}{\sqrt{b}}\right).$$

所以，当 $t\to\infty$ 时，$u\to 1$，即 $\theta\to 0$。这种情况的运动如图9.30(b)所示。

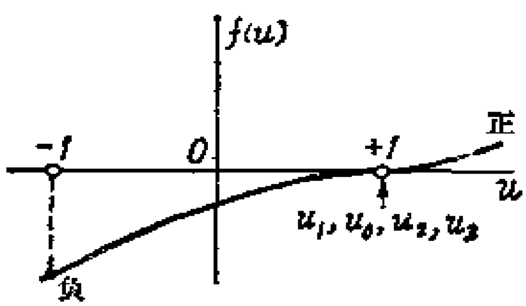


图9.31 三重根的情况

（3）出现三重根的情况。这时必有 $u_1=u_0=u_2=u_3=1$（图9.31）。即在运动过程中 $u(t)\equiv 1$，它对应于刚体的章动角 $\theta\equiv 0$。显然即是刚体绕 Oz 轴作定轴转动的情况。

下面我们详细讨论刚体的规则进动。设运动过程中 $\theta=\theta_0$（常量），由首次积分（9.34）可知进动角速度 $\dot{\psi}$ 是常量，记作 p。于是由式（9.32）可知，自转角速度 $\dot{\varphi}$ 也是常量。这些是规则进动的特点。在规则进动中，角速度分量 ω_3 与进动角速度 p 之间有一定的关系，这时式（9.31）的第一个方程成为

$$-J_1p^2\sin\theta_0\cos\theta_0+J_3\omega_3p\sin\theta_0=mga\sin\theta_0.$$

不考虑 $\sin\theta_0=0$ 的情况（对应于陀螺的直立和下悬两个位置），由上式得出 p 与 ω_3 的关系式为

$$(J_1\cos\theta_0)p^2-(J_3\omega_3)p+mga=0. \qquad (9.38)$$

对于已知的 ω_3 可得两个进动角速度

$$p_1 \text{ 或 } p_2 = \frac{1}{2J_1\cos\theta_0}\left(J_3\omega_3 \pm \sqrt{(J_3\omega_3)^2 - 4mgaJ_1\cos\theta_0}\right).$$

在玩具陀螺的情况中，因为 $\theta_0 < \pi/2$，所以规则进动只有在

$$J_3\omega_3 \geqslant 2\sqrt{mgaJ_1\cos\theta_0} \tag{9.39}$$

时才有可能发生，这也就是玩具陀螺不倒下时应该满足的条件。

如果自转是高速的，即当

$$J_3\omega_3 \gg 2\sqrt{mgaJ_1\cos\theta_0}$$

时，则有

$$p_1 \approx \frac{J_3\omega_3}{J_1\cos\theta_0}, \qquad p_2 \approx \frac{mga}{J_3\omega_3}.$$

p_1 对应于**快进动**角速度，ω_3 愈大，p_1 愈大。p_2 对应于**慢进动**角速度，ω_3 愈大，p_2 却愈小。通常能够观察到的只是慢进动现象。快进动必须在动量矩 G_2 非常大的情况下才能出现，只有在实验室中专门创造条件才能观察到。慢进动角速度公式在 6-4 的近似理论中（图6.28）已经讨论过。

当规则进动受到了微小的外干扰时，研究刚体的运动特点是一个有应用价值而又有趣的课题。描述刚体对称轴 $O\zeta$ 的运动有两个变量 θ 与 ψ，在未受扰动时有

$$\theta = \theta_0, \qquad \psi = pt + \psi_0.$$

在受到扰动后 θ 和 ψ 有微小的改变量 $\Delta\theta$ 和 $\Delta\psi$，所以有

$$\theta = \theta_0 + \Delta\theta, \qquad \psi = pt + \psi_0 + \Delta\psi.$$

$\dot{\varphi}$ 由 $\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta = \omega_3$（常量）给出。将这些关系代入式（9.31）的第一和第二个方程，按 $\Delta\theta, \Delta\psi$ 的级数展开，略去 $\Delta\theta$ 和 $\Delta\psi$ 的二阶以上的微量，并利用式(9.38)，可以得出受扰动后的运动微分方程为

$$
\left\{
\begin{aligned}
&J_1\frac{d^2(\Delta\theta)}{dt^2}+J_1 p^2\sin^2\theta_0(\Delta\theta)\\
&\qquad+(J_3\omega_3-2J_1p\cos\theta_0)\sin\theta_0\frac{d(\Delta\psi)}{dt}=0, \qquad (9.40)\\
&-(J_3\omega_3-2J_1p\cos\theta_0)\frac{d(\Delta\theta)}{dt}+J_1\sin\theta_0\frac{d^2(\Delta\psi)}{dt}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

这组线性微分方程组的特征方程是

$$
\begin{vmatrix}
J_1\lambda^2+J_1p^2\sin^2\theta_0 & (J_3\omega_3-2J_1p\cos\theta_0)\sin\theta_0\lambda\\
-(J_3\omega_3-2J_1p\cos\theta_0)\lambda & J_1\sin\theta_0\,\lambda^2
\end{vmatrix}=0,
$$

或

$$
\lambda^2\sin\theta_0[J_1^2\lambda^2+J_1^2p^2\sin^2\theta_0+(J_3\omega_3-2J_1p\cos\theta_0)^2]=0.
$$

由于方括号中给出的特征根 λ ① 是纯虚根，这说明受扰动运动中 $\Delta\theta$ 和 $\Delta\psi$ 的变化将是振荡型的，它将是在规则进动附近的振动，其振动频率是

$$
n=\sqrt{(J_3\omega_3/J_1-2p\cos\theta_0)^2+p^2\sin^2\theta_0}.
$$

对于高速转动时的慢进动情况，因 $\omega_3\gg p$，所以这个频率的近似值为

$$
n\approx J_3\omega_3/J_1,
$$

它和 ω_3 是同一数量级的量。高速转子在慢进动附近的高频振动现象叫做**章动**，n 是章动频率。玩具陀螺嗡嗡发声，其原因就在于有章动。

最后，我们具体地看一看 $O\zeta$ 轴是怎样运动的。设 $\Delta\theta$ 与 t 的关系是

$$
\Delta\theta=C_1\cos(nt+C_2),
$$

① 还有二重根 $\lambda=0$，可以证明它不会使 $\Delta\theta$ 单调变化。对于特征根 λ 的详细讨论在这里从略，只是给出了有关的结论。

其中 C_1 和 C_2 是积分常数。由式(9.40)的第一个方程可知 $\Delta\psi$ 应具有以下形式

$$\Delta\psi = C_3 + C_4 \sin(nt + C_2),$$

其中 C_3 和 C_4 是积分常数。

在规则进动时，ζ 轴的两个变量 θ 和 ψ 的变化关系可以用 ψ-θ 平面上的一条曲线表示出来(图 9.32)。章动部分对应于

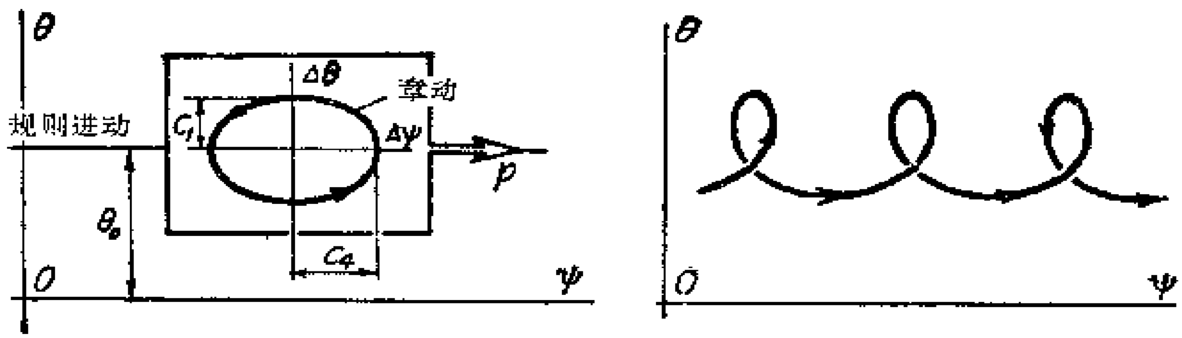


图9.32 规则进动和章动

$\Delta\psi - \Delta\theta$ 平面上一个椭圆。转圈的频率就是章动频率。把章动叠加到规则进动上以后，$O\zeta$ 轴的运动情况与图 9.28 相似。

我们在前面说过，地球是一个大陀螺（6-4例6.17,图6.30），地球除有进动（岁差）外，还有章动[①]。由于章动，地球南北极在地球表面上是在移动的。地球章动的主要原因是月球对赤道鼓起部分的引力形成的力矩。

（五）重刚体定点运动的一般提法

在重力作用下，是否能从刚体的定点运动动力学方程中得出足够的首次积分，从而最后解出刚体的运动规律呢？这就是重刚体定点运动的问题，这个问题在十八、十九世纪曾经吸引了许多

① 地球章动主要项的周期是18.6年。《周髀算经》（汉代数学书）把十九年叫做一章，这是汉语中章动、章动角等词的来由。章动在英语中叫 nutation，原意是“点头”。

数学、力学工作者的兴趣，并作了大量的工作。

上面已经讲过两种情况：

（1）欧拉情况，即重力矩为零的情况。这出现在两种情况中，或者不计重力，或者固定点就是质心。对于主惯量 J_1, J_2 和 J_3 无限制。

（2）拉格朗日情况，即 $J_1=J_2$，质心在 $O\zeta$ 轴（主惯量 J_3 对应的主轴）上。

在这两种情况中，除了能量积分和重力方向的动量矩积分外，都还有第三个首次积分。在欧拉情况中，动量矩沿 Ox 或 Oy 轴的投影也是守恒的；在拉格朗日情况中，还有角速度积分，即 $\omega_3=$常量。这两种情况最后都可以用椭圆函数表达运动规律。

我们知道，重刚体定点运动的欧拉动力学方程对欧拉角来说是三个二阶非线性微分方程，如能找出六个首次积分，则问题可全部解决。事实上 $G_z=$常量和机械能守恒给出了两个首次积分，泊松（Possion）给出了一个显然的几何积分，如果还存在第四个首次积分，则应用雅可比的后添因子理论可以找出第五个首次积分。最后可以证明，如果五个首次积分都已找到，则欧拉角就可表成 t 的函数积分式[1]。因此问题归结为寻求第四个首次积分，实际上就是寻求除 $G_z=$常量和机械能守恒以外的第三个适合任何初始条件的普遍积分。除了欧拉和拉格朗日两种情况外，还有柯瓦列夫斯卡娅[2]情况也存在这第三个普遍积分。

（六）柯瓦列夫斯卡娅情况

设 $J_1=J_2=2J_3$，即惯量椭球体是长的旋转体，刚体的质心 C 在赤道平面 $O\xi\eta$ 内（图 9.33(a)，一个具体的刚体如图中(b)所示），外力有重力和支点 O 的反力。取 OC 的方向为 ξ，柯瓦列夫斯卡娅给出的首次积分（1889年）是

---

① 见莆赫哥尔茨《理论力学基本教程》中译本下册第四章§6。

② С.Я.Ковалевская(1850—1891)，俄国女数学家。

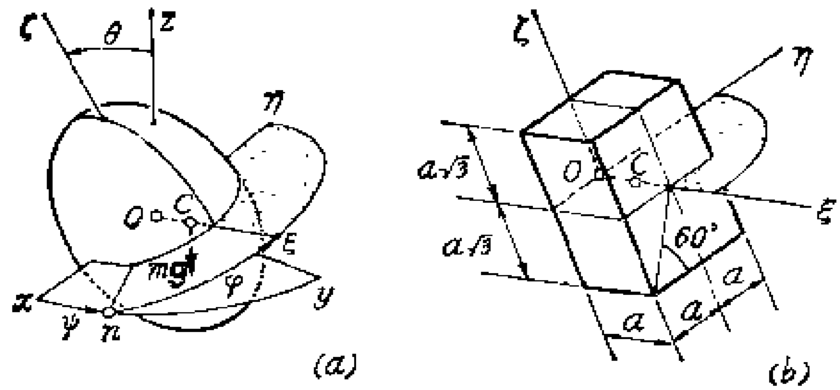


图9.33 柯瓦列夫斯卡娅情况

$$(\omega_1^2-\omega_2^2-k^2\sin\theta\ \sin\varphi)^2+(2\omega_1\omega_2-k^2\sin\theta\ \cos\varphi)^2=常量,$$

其中 $k^2=mg\cdot\overline{OC}/J_3$， ω_1 和 ω_2 是 $\boldsymbol{\omega}$ 在 ξ 和 η 方向的分量。即

$$\omega_1=\dot\psi\sin\varphi\ \sin\theta+\dot\theta\cos\varphi,$$

$$\omega_2=\dot\psi\cos\varphi\ \sin\theta-\dot\theta\sin\varphi.$$

于是运动规律可以用超椭圆函数表达出来。这种情况要求的条件很苛刻，实际上几乎没有应用的可能，但从历史发展来看它在理论上有重要的地位。呼松（Husson，1905年)和波加梯(Burgatti 1910年）等人证明了除欧拉、拉格朗日和柯瓦列夫斯卡娅三种情况外，对于其他情况再也找不出适合任何初条件的普遍的代数积分。当然，这并不排除在某些特殊的初始条件下存在第三个首次积分。

9-5 刚体一般运动的动力学方程

设刚体的质量为 M，质心在 C处，$Oxyz$ 或 $[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 是惯性参考系，$C\xi\eta\zeta$ 或 $[C,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$是过质心的固连系，且 ξ,η,ζ 是刚体的主轴。所有外力的主向量是 $\boldsymbol{F}$，对 C 点的主矩是 $\boldsymbol{L}$。

根据质心运动定理，质心的动力学方程在系 $[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$中的投影式为

$$
\begin{cases}
M\ddot{x}_C = F_x, \\
M\ddot{y}_C = F_y, \\
M\ddot{z}_C = F_z.
\end{cases} \tag{9.41}
$$

又根据对质心的动量矩定理，刚体绕质心运动的动力学方程在系$[C, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$中的投影式为

$$
\begin{cases}
J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = L_1, \\
J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = L_2, \\
J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = L_3,
\end{cases} \tag{9.42}
$$

其中 L_1, L_2, L_3 是 $\boldsymbol{L}$ 沿主轴的分量，$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 是角速度$\boldsymbol{\omega}$ 沿主轴的分量。它们与欧拉角 ψ, θ, φ 的关系是

$$
\begin{cases}
\omega_1 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\
\omega_2 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\
\omega_3 = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}.
\end{cases} \tag{9.43}
$$

联合式(9.41)，(9.42)和(9.43)三组方程就是刚体一般运动的全部动力学方程。式(9.43)代入式(9.42)得到三个以 ψ, θ, φ 表达的二阶微分方程。自由刚体在空间有六个自由度，这里正好有六个二阶微分方程，在给定了十二个初始条件以后，就可以解出全部运动规律。

在具体求解方程时，应尽量利用物理条件写出有关的首次积分，以便把方程组降阶。

例9.13 分析一均匀的球体在重力场中的运动。

解 先考虑球体质心的运动，因为球体质心只受到重力的作用，因而质心的轨迹是一抛物线，它与质点在重力作用下的运动情况相似。

再考虑球体绕质心的转动运动。因外力对质心的主矩为零，

所以动量矩守恒。由于球体的任意直径都是主轴，动量矩守恒意味着相对惯性系的角速度是常向量，即球体在运动中自转的方向和快慢均不变。▎

＊＊＊　如用欧拉方程研究上例中的转动运动，可以得出ω_1,ω_2和ω_3均为常量，怎样再由此证明$\omega_x,\omega_y,\omega_z$也是常量？＊＊＊

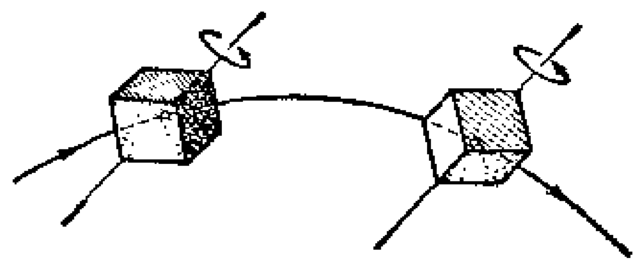


图9.34　立方体的运动

＊＊＊　有一均质的立方体在重力场中被抛出（图9.34），问其运动情况与例9.13中的情况有什么异同？＊＊＊

例9.14　炮弹转动的稳定性。 设炮弹是轴对称的，在飞行中对称轴$C\zeta$与质心运动方向Cz偏离一个小角度θ(图9.35)。可以认为空气阻力的合力$\boldsymbol{R}$作用于轴$O\zeta$上的A点，这个点称为阻力中心，$CA=a$。$\boldsymbol{R}$的方向与飞行方向Cz相反。问炮弹绕$O\zeta$轴的自转角速度ω_3应多大，才能保证在飞行中弹头始终指向前方？

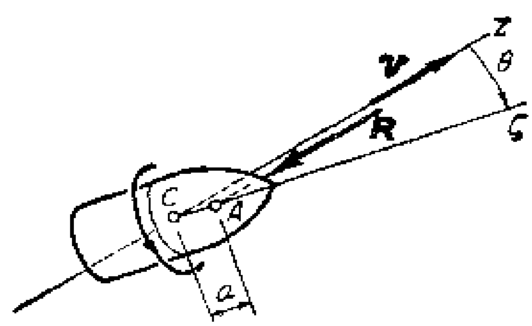


图9.35　炮弹的稳定性

解　在某一小段轨道中，Cz的方向可以认为是不变的。再考虑对质心的转动。设与炮弹的主轴ξ,η,ζ所对应的主惯量是$J_1=J_2,J_3$。在质心平动系中炮弹受到的阻力$\boldsymbol{R}$的大小和方向都不变，作用点A又在对称轴$C\zeta$上，这就是上节已分析过的拉格朗日情况。只要将其中的mga换成Ra，并有$\cos\theta\approx1$，就可以应用式(9.39)的结果。所以，要使规则进动成为可能，或者说保证弹头指向前方，角速度ω_3必须满足

$$\omega_3 > \frac{2\sqrt{RaJ_1}}{J_3}.$$

在炮膛中有螺旋形的来复线，使炮弹出膛时就有很高的自转角速度。这就保证了炮弹在运动过程中，一旦受到外来干扰而使 $O\zeta$ 轴偏离质心速度方向时，炮弹只会进动而不会"大翻身"。

我们只分析了炮弹在一小段轨道上的情况，这种分析对于炮弹轨迹为非常平直的曲线时是近似适用的。当然，对于一般的情况，炮弹的运动要复杂得多。▌

例9.15 写出重圆盘在粗糙水平面上滚动时的动力学方程。

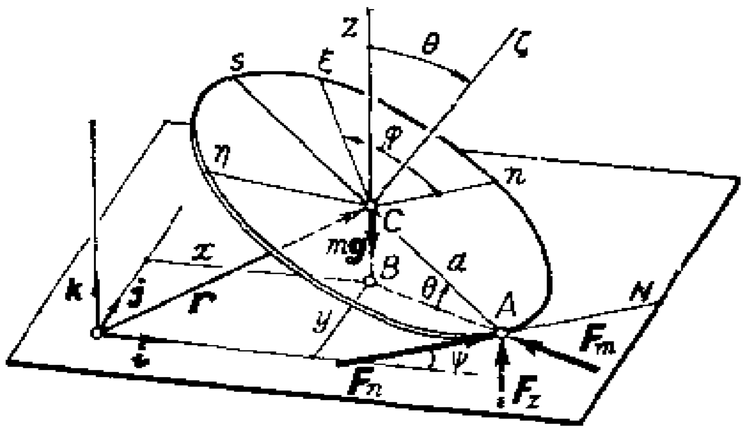


图9.36 圆盘在粗糙水平面上的滚动

解 设圆盘半径为 a，质量为 m，中心 C 的坐标为 (x,y,z)，z 轴竖直向上（图9.36）。由于圆盘具有对称轴 $O\zeta$，采用莱沙尔坐标架 $[C,\boldsymbol{n}^0,\boldsymbol{s}^0,\boldsymbol{e}_3]$ 比较方便，这里节线 Cn 平行于圆盘平面和水平面 Oxy 的交线 AN，$\boldsymbol{s}^0=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{n}^0$ 沿半径 AC 方向，$\boldsymbol{e}_3$ 沿 $C\zeta$ 轴。

在列出运动微分方程以前，注意到圆盘不是自由刚体，水平面对它是一个约束，约束条件是接触点 A 的速度

$$\boldsymbol{v}_A=0,$$

即

$$\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{CA}=0.$$

由此可得三个投影式

沿 $\boldsymbol{n}^0$ 方向： $\dot{x}\cos\psi+\dot{y}\sin\psi+a\,\omega_3=0,$ （1）

沿 AB 方向： $-\dot{x}\sin\psi+\dot{y}\cos\psi+a\,\dot{\theta}\sin\theta=0,$ （2）

沿 z 方向： $\dot{z}-a\,\dot{\theta}\cos\theta=0,$ （3）

其中 $\omega_3=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}$ 是角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $O\zeta$ 轴上的投影。上面的式(3)是可积分的，它与 $z=a\sin\theta$ 等价，但式(1)和(2)无法积分成 $x,y,z,\psi,\theta,\varphi$ 之间的关系式。

圆盘受到的外力有作用在质心上的重力$(-mg\,\boldsymbol{k})$和水平面给于的反力$(F_n\boldsymbol{n}^0+F_m\boldsymbol{m}^0+F_z\boldsymbol{k})$，其中 $\boldsymbol{m}^0$ 是 AB 方向的单位向量。

由质心运动定理给出

$$\begin{cases}\ddot{x}\cos\psi+\ddot{y}\sin\psi=F_n/m, & (4)\\ -\ddot{x}\sin\psi+\ddot{y}\cos\psi=F_m/m, & (5)\\ \ddot{z}=F_z/m-g. & (6)\end{cases}$$

圆盘绕质心 C 的转动方程可根据式(9.31)得出

$$\begin{cases}J_1\ddot{\theta}-J_1\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta+J_3\dot{\psi}\omega_3\sin\theta\\ \qquad\qquad=-F_za\cos\theta+F_ma\sin\theta, & (7)\\ J_1\dfrac{d}{dt}(\dot{\psi}\sin\theta)+J_1\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta-J_3\dot{\theta}\omega_3=0, & (8)\\ J_3\dot{\omega}_3=F_na. & (9)\end{cases}$$

从以上九个式子（1）—（9）中消去未知反力 F_n,F_m,F_z 和质心坐标 x,y,z 的有关导数，经过一些运算后，最后得到以 ψ,θ 和 ω_3 为变量的动力学方程

$$\begin{cases}(J_1+ma^2)\ddot{\theta}-J_1\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\\ \qquad+(J_3+ma^2)\dot{\psi}\omega_3\sin\theta+mga\cos\theta=0, & (10)\\ J_1\dfrac{d}{dt}(\dot{\psi}\sin\theta)+J_1\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta-J_3\omega_3\dot{\theta}=0, & (11)\\ (J_3+ma^2)\dot{\omega}_3=ma^2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta. & (12)\end{cases}$$

这就是题目所要求的结果。

下面我们来看一下圆盘与水平面的夹角 θ 保持不变时应该满足什么条件？将 $\theta=\theta_0$（常量）代入式(11)，得

$$\dot{\psi}\sin\theta_0=\text{常量}。$$

如果不考虑 $\sin\theta_0=0$ 的情况（它代表什么运动？），则进动角速度 $\dot{\psi}=p$（常量）。

将 $\theta=\theta_0$ 代入式(12)，得 $\omega_3=$常量。再代入式(10) 得 θ_0,ω 和 p 应满足的关系式

$$\begin{aligned}(J_3+ma^2)p\omega_3\sin\theta_0-J_1p^2\sin\theta_0\cos\theta_0 \\ +mga\cos\theta_0=0。\end{aligned}\tag{13}$$

将 $\theta=\theta_0$，$\omega_3=$常量，$\dot{\psi}=p$ 代入方程(1)，(2)，(3)中可得

$$\begin{cases}\dot{x}=-a\omega_3\cos(pt+\psi_0),\\ \dot{y}=-a\omega_3\sin(pt+\psi_0),\\ \dot{z}=0,\end{cases}$$

其中 ψ_0 为常量。积分后得

$$\begin{cases}x=x_0-(a\omega_3/p)[\sin(pt+\psi_0)-\sin\psi_0],\\ y=y_0+(a\omega_3/p)[\cos(pt+\psi_0)-\cos\psi_0],\\ z=a\sin\theta_0,\end{cases}$$

其中 x_0,y_0 为常量。可以看出，质心 C 的轨迹为半径 $\rho=a\omega_3/p$ 的圆周，这说明圆盘沿圆周滚动（图9.37）。

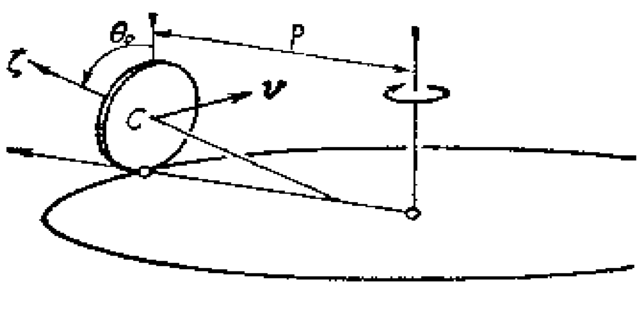


图9.37 圆盘沿圆周滚动

*** 由式(13)和 $\rho=a\omega_3/p$，分析 $\theta_0=\pi/2$ 时圆盘的运动。分别考虑(a) $p\neq0$，而 $\omega=0$；(b) $p=0$，而

$\omega \neq 0$ 两种情况，从而说明圆盘沿圆周滚动时要求圆盘平面保持直立是不可能的。＊＊＊

例9.16 分析圆盘沿直线滚动时的稳定性（图9.38）。

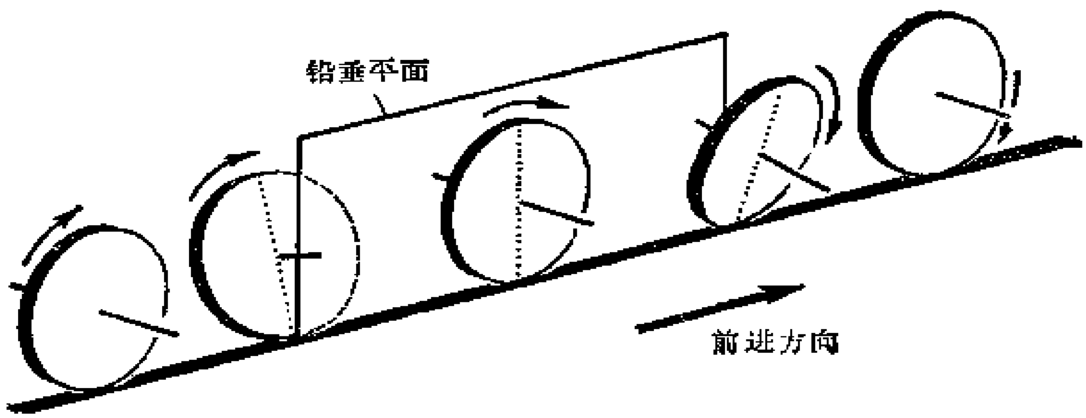


图9.38 圆盘会不会倒下来？

解 本例所用符号与上例相同。设未受扰动的运动是

$$\theta=\pi/2,\quad \omega_3=\Omega\,(\text{常量}),\quad \dot{\psi}=0.$$

这时上例中的 $\rho=\infty$。受扰动的运动是

$$\theta=\pi/2+\Delta\theta,\qquad \omega_3=\Omega+\Delta\omega_3,\qquad \dot{\psi}=\Delta\dot{\psi},$$

这里 $\Delta\theta, \Delta\omega_3, \Delta\dot{\psi}$ 都是微量。代入上例中式(10)和(11)，按 $\Delta\theta$, $\Delta\omega_3, \Delta\dot{\psi}$ 展开，略去高阶微量，得线性微分方程组

$$\begin{cases} (J_1+ma^2)\dfrac{d^2(\Delta\theta)}{dt^2}-mga(\Delta\theta)+(J_3+ma^2)\Omega(\Delta\dot{\psi})=0, \\ J_1\dfrac{d(\Delta\dot{\psi})}{dt}-J_3\Omega\dfrac{d(\Delta\theta)}{dt}=0. \end{cases}$$

则得以 $\Delta\theta, \Delta\dot{\psi}$ 为变量的特征方程

$$\begin{vmatrix} \lambda^2(J_1+ma^2)-mga & (J_3+ma^2)\Omega \\ -J_3\Omega\lambda & J_1\lambda \end{vmatrix}=0.$$

除去零根 $\lambda=0$ 外，决定特征根的方程是

$$J_1(J_1+ma^2)\lambda^2+[J_3(J_3+ma^2)\Omega^2-J_1mga]=0.$$

运动稳定的一个必要条件是 λ 为纯虚根，即

$$J_3(J_3+ma^2)\Omega^2>J_1mga,$$

或

$$\Omega>\sqrt{\frac{J_1mga}{J_3(J_3+ma^2)}}.$$

在上述稳定性条件被满足时，圆盘向前滚动时将左右晃动，晃动的圆频率是

$$\sqrt{\frac{J_3\Omega^2(J_3+ma^2)-J_1mga}{J_1(J_1+ma^2)}}. \quad \blacksquare$$

＊＊＊　设自由的自行车车轮的半径 $a=33$ 厘米，$J_3=0.8ma^2$，$J_1=0.4ma^2$。问车轮在水平地面上滚动时前进速度至少应为多少才能不致倒下？如车轮以这个临界速度的两倍前进，问晃动的频率是多少？＊＊＊

在上两例中，由于惯量椭球是旋转椭球，即 $J_1=J_2\neq J_3$，所以采用莱沙尔坐标架较为方便。如果惯量椭球是圆球，即 $J_1=J_2=J_3$，那么坐标架的选取将可更自由一些。下面的例子就属于这种情况。

例9.17　设有一均质圆球在粗糙面上滚动，列出球在重力作用下的动力学方程。

解　设球半径为 a，质量为 m，对质心的主惯量是 $J_1=J_2=J_3=J$。球被约束在粗糙曲面 S 上运动（图9.39）。取动坐标系 $C\xi\eta\zeta$ 如下：C 是球心，ζ 轴沿 AC 方向，A 是球与曲面 S 的接触点，ξ 轴垂直于 ζ 轴和 z' 轴，z' 轴竖直向上，η 轴由右手规律确定。相应的单位向量记为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$。一般说来，这三根轴相对于球的位置是变化的。

设球的角速度

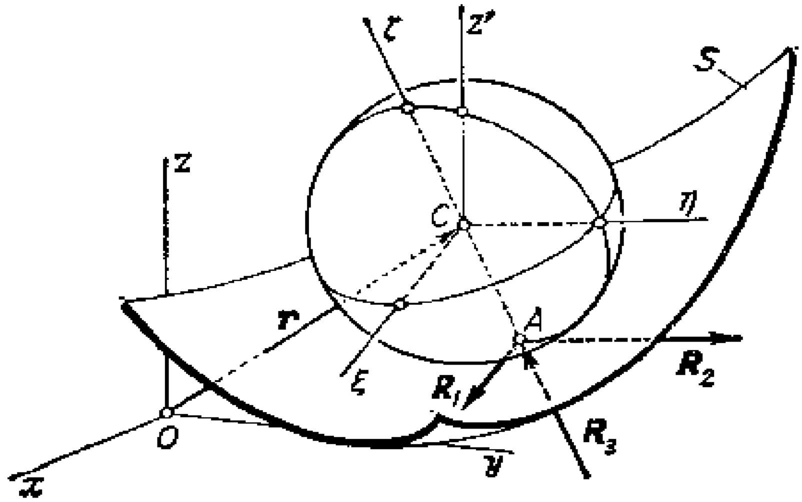


图9.39 圆球在粗糙面上运动

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3,$$

$\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 是 t 的待定函数。

设球心C的位置由向径 $\boldsymbol{r}$ 确定，$\boldsymbol{r}$ 有三个未知坐标，例如 x，y，z，曲面 S 在接触点 A处的切平面与平面 $C\xi\eta$ 平行，所以动标架 $C\xi\eta\zeta$ 自身的角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 由C点的位置和速度确定，它可表达成

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)。$$

如果粗糙面S在惯性空间是固定的，则这个关系式中将不显含时间 t。

作用在球上的外力有重力 $m\boldsymbol{g}$ 和曲面反力 $\boldsymbol{R}$，

$$\boldsymbol{R}=R_1\boldsymbol{e}_1+R_2\boldsymbol{e}_2+R_3\boldsymbol{e}_3,$$

其中 R_1,R_2,R_3 都是未知量。

这样，一般说来共有三个未知向量：$\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}$，或九个未知分量，如 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$；$x,y,z$ 和 R_1,R_2,R_3。为了解上述问题应该列出三个向量微分方程。

第一个是约束方程。当曲面 S 是固定的，则接触点A的速度 $\boldsymbol{v}_A$ 应该等于零。当曲面 S 按已知规律运动时，则 $\boldsymbol{v}_A$ 可以表达

成$\boldsymbol{r}$和t的已知函数。所以约束条件是

$$\dot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{\omega}\times(-a\boldsymbol{e}_3)=0,$$

或

$$\dot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{\omega}\times(-a\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{v}_A(\boldsymbol{r},t)。\tag{1}$$

第二个是质心运动方程

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{R}。\tag{2}$$

第三个方程由质心动量矩定理给出

$$\frac{\widetilde{d}\boldsymbol{G}}{dt}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{G}=\boldsymbol{L},\tag{3}$$

其中动量矩

$$\boldsymbol{G}=J\omega_1\boldsymbol{e}_1+J\omega_2\boldsymbol{e}_2+J\omega_3\boldsymbol{e}_3,$$

$$\frac{\widetilde{d}\boldsymbol{G}}{dt}=J\dot{\omega}_1\boldsymbol{e}_1+J\dot{\omega}_2\boldsymbol{e}_2+J\dot{\omega}_3\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{L}=-a\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{R}=aR_2\boldsymbol{e}_1-aR_1\boldsymbol{e}_2。$$

由(1),(2),(3)可得出九个数量方程。在具体问题中有些方程可适当简化。

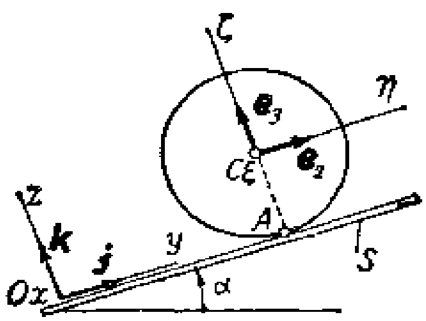


图9.40 斜面上的球

下面我们考虑一个最简单的情况。

设S是固定的斜面，它与水平面的夹角是α。取x轴为沿斜面的水平线；y轴沿斜面的最大倾斜线，并指向上；z轴垂直于斜面，如图9.40所示。取$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$同$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$。于是$\boldsymbol{\Omega}=0$。由约束方程(1)给出

$$\dot{x}-a\omega_2=0,\qquad \dot{y}+a\omega_1=0,\qquad \dot{z}=0。$$

由质心运动方程给出

$$\begin{cases} m\ddot{x}=R_x, \\ m\ddot{y}=-mg\sin\alpha+R_y, \\ m\ddot{z}=-mg\cos\alpha+R_z. \end{cases}$$

由动量矩方程(3)给出

$$J\dot{\omega}_1=aR_y, \quad J\dot{\omega}_2=-aR_x, \quad J\dot{\omega}_3=0.$$

如果球是实心的，则 $J=2ma^2/5$。由九个方程可以解得

$$\dot{x}=C_1 \text{（常量）}, \quad \ddot{y}=-\frac{5}{7}g\sin\alpha, \quad z=a,$$

故球心轨迹是一平行于斜面的抛物线；

$$\dot{\omega}_1=5g/7a, \quad \omega_2=C_1/a, \quad \omega_3=C_2 \text{（常量）},$$

所以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的大小和方向都在变化；

$$R_x=0, \quad R_y=\frac{2}{7}mg\sin\alpha, \quad R_z=mg\cos\alpha,$$

即约束反力的大小和方向都不变。▌

读者可参见习题9.36—9.40，那里有些题中的粗糙面 S 是柱面和球面；有的题中粗糙面 S 本身在转动，计算要复杂一些，但基本方程还是上述式(1),(2)和(3)。

9-6 非惯性参考系中的刚体动力学

根据第八章的讨论，在非惯性系中，只要在每一个质点上附加上牵连惯性力和科氏惯性力，那么就可以应用牛顿定律，并由此导出有关的推论。所以，在非惯性系中讨论刚体动力学时只要引进惯性力的主向量和主矩，则前几节推导的动力学方程一样是可以用的。

现在对两种特殊情况计算惯性力的主向量和主矩。

（一）平动非惯性系

对于平动的非惯性系，科氏力为零，而刚体上各点的牵连加

速度是一样的。设牵连加速度是 $\boldsymbol{a}_e$，则任一质量为 m_i 的质点的惯性力是 $-m_i\boldsymbol{a}_e$，所有这些惯性力的主向量是

$$\boldsymbol{F}_{惯}=\sum(-m_i\boldsymbol{a}_e)=-M\boldsymbol{a}_e.$$

显然，所有质点的惯性力对质心的主矩等于零（为什么？）。这就是说，在平动非惯性系中处理刚体动力学问题时，只要在刚体的质心处加上一个集中的惯性力就可以了。

例9.18 分析匀加速车厢中的陀螺①（图9.41）。

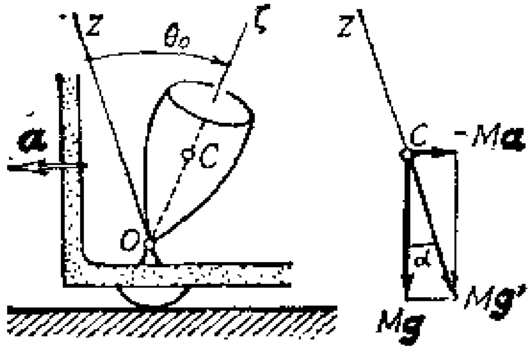


图9.41 车厢中的陀螺

解 设车厢的加速度为 $\boldsymbol{a}$，指向左。陀螺的支点固定在车厢地板上。惯性力是 $-M\boldsymbol{a}$，作用在质心 C 上，M 是陀螺的质量。重力和惯性力的合力为

$$M\boldsymbol{g}'=M\boldsymbol{g}-M\boldsymbol{a},$$

因而陀螺好象在重力加速度为 $\boldsymbol{g}'=\boldsymbol{g}-\boldsymbol{a}$ 的重力场中运动。新的"铅垂"轴 Oz 与地面的竖直线之间的夹角为

$$\alpha=\mathrm{arc\,tg}(a/g),$$

新的"重力加速度"的大小

$$g'=\sqrt{g^2+a^2}.$$

作了这些改变以后，就可以应用前几节的结果。比如，在规则进动时要求满足

$$J_3\omega_3>2\sqrt{m\sqrt{g^2+a^2}\cdot l\cos\theta_0},$$

其中 $l=\overline{OC}$，而章动角 θ_0 应该是新的"铅垂"轴 Oz 与主轴 $O\zeta$ 之间的夹角。其他相应的结果就不一一重复了。▌

（二）转动非惯性系

这种情况要比平动非惯性系的情况复杂，我们先看一个例

① 此例与8-1中例8.1（图8.2）的讨论十分类似。

子。

例9.19 设圆轮的质量均匀地分布在其边缘上，总质量为M，半径为R。轮子绕自身对称轴（水平放置）Ox以匀角速度（$-\omega$）转动，而Ox轴又绕竖直轴Oz以匀角速度$\boldsymbol{\Omega}$转动（图9.42）。求惯性力的主向量和相对O点的主矩。

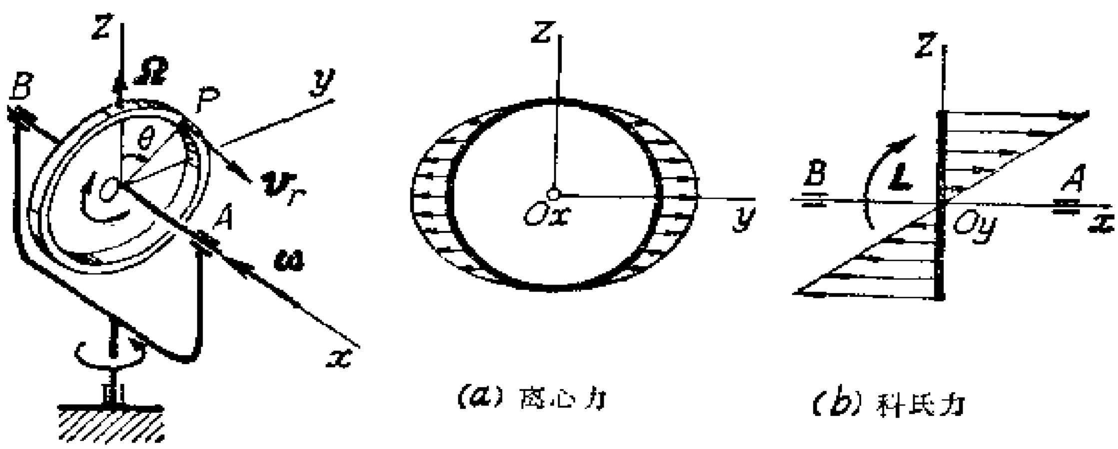


图9.42 计算惯性力矩

解 圆环上各点的牵连惯性力、即离心力如图9.42(a)所示，显然它们构成一个平衡力系，对惯性力的主向量和主矩都没有影响，因此只需考虑科氏力。

圆环上任一点P的相对速度是

$$\boldsymbol{v}_r = R\omega(\cos\theta\ \boldsymbol{j} - \sin\theta\ \boldsymbol{k}),$$

设它的质量是$dm = (M/2\pi)d\theta$，则科氏力为

$$d\boldsymbol{F}_c = dm \cdot 2\boldsymbol{v}_r \times (\Omega \boldsymbol{k}) = (M/\pi)R\omega\Omega\ d\theta\ \cos\theta \boldsymbol{i},$$

它对质心O的力矩是

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{L}_1 &= \overrightarrow{OP} \times d\boldsymbol{F}_c \\ &= (M/\pi)R^2\omega\Omega\ \cos\theta(\cos\theta \boldsymbol{j} - \sin\theta \boldsymbol{k})d\theta. \end{aligned}$$

求$d\boldsymbol{L}_1$的积分，得到科氏惯性力对O点的主矩为

$$\boldsymbol{L}_1 = \int_0^{2\pi} d\boldsymbol{L}_1 = MR^2\omega\ \Omega \boldsymbol{j}.$$

或写成

$$L_1 = -\Omega \times J\omega.$$

我们可以看出，这个 L_1 就是6-4中的陀螺力矩(在那里用的符号是 $-L$)。由于这个力矩，轴承 A 将受到轴对它的附加压力，方向向下，而轴承 B 将受到向上的附加压力。▌

设有一轴对称刚体，它绕定点 O 转动（图9.43），$O\xi\eta\zeta$ 是

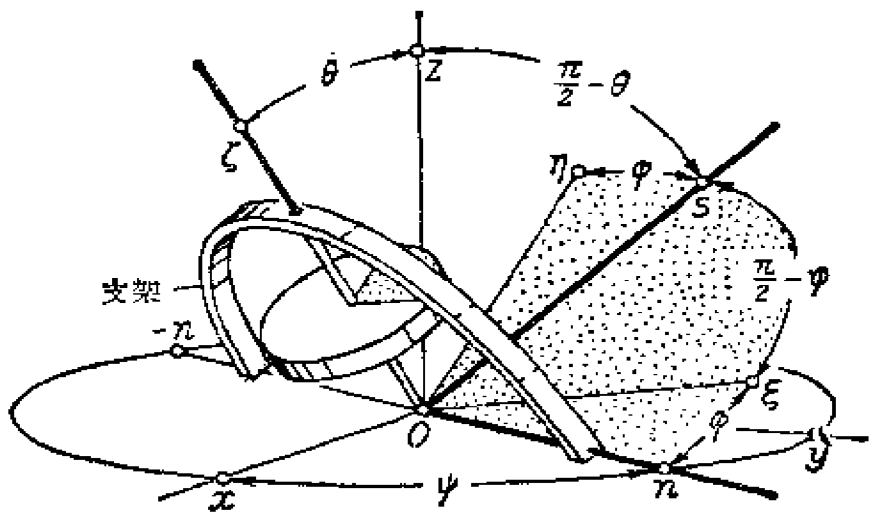


图9.43　转动的非惯性系 $Ons\zeta$

固连坐标系，$O\zeta$ 是对称轴，$Oxyz$ 是惯性坐标系。取与莱沙尔坐标系 $Ons\zeta$ 相连的参考系（不妨理解为一个支架）为我们所考虑的非惯性系，此参考系本身的角速度是

$$\Omega = \dot{\psi}\, k + \dot{\theta}\, n^0,$$

而刚体在此参考系中作定轴转动。刚体上任何一个质量为 m，向径为 r 的质点的惯性力有三项：

（1）横向牵连惯性为：$-m\varepsilon \times r$，$\varepsilon = \dot{\Omega}$；

（2）离心牵连惯性力：$-m\Omega \times (\Omega \times r)$；

（3）科氏惯性力：$-2m\Omega \times (\omega \times r)$，$\omega = \dot{\varphi}\, e_3$。

下面计算惯性力对 O 点的矩。由于刚体是旋转对称体，$O\zeta$ 轴

是对称轴，所以$On,Os,O\zeta$是三根主轴。设n,s,ζ是刚体上各质点在$Ons\zeta$系中的坐标，则惯量之间有下列关系

$$\sum mn^2 = \sum ms^2 = \frac{1}{2}\sum m(n^2+s^2) = \frac{1}{2}J_3,$$

$$\sum m(n^2+\zeta^2) = \sum m(s^2+\zeta^2) = J_1.$$

随后的计算虽然十分冗长，但是没有原则性困难，最后的结果列在表 9.1 中。

表 9.1

$L_{惯}$	在 $\boldsymbol{n}^0$ 上的投影	在 $\boldsymbol{s}^0$ 上的投影	在 $\boldsymbol{e}_3$ 上的投影
横向惯性力矩	$-J_1\ddot{\theta}$	$-J_1\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\sin\theta)$	$-J_3\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\theta)$
离心惯性力矩	$(J_1-J_3)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta$	$-(J_1-J_3)\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta$	0
科氏惯性力矩	$-J_3\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta$	$J_3\dot{\theta}\dot{\varphi}$	0

现在我们在非惯性参考系$Ons\zeta$中列出刚体绕定轴$O\zeta$转动的动力学方程。根据动量矩定理，有

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{G}}{dt} = \boldsymbol{L}_{外} + \boldsymbol{L}_{惯},$$

它在$\boldsymbol{n}^0,\boldsymbol{s}^0,\boldsymbol{e}_3$三个方向的投影为

$$\begin{cases} 0 = -J_1\ddot{\theta} + (J_1-J_3)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta - J_3\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta + L_n, \\ 0 = -J_1\dfrac{d}{dt}(\dot{\psi}\sin\theta) - (J_1-J_3)\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta + J_3\dot{\theta}\dot{\varphi} + L_s, \\ J_3\ddot{\varphi} = -J_3\dfrac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\theta) + L_\zeta. \end{cases}$$

其中L_n,L_s,L_ζ是外力矩$\boldsymbol{L}_{外}$的投影。经整理以后，不难看出它就是方程组(9.31)。

现在进一步说明惯性力矩与陀螺力矩的关系。在 6-4 中曾对陀螺力矩下过一个定义，那是在惯性系中分析问题的。若在非惯

性系中分析问题，我们定义**陀螺力矩为科氏惯性力对定点O的主矩**。在例9.20中将会看到这种定义与6-4中定义的结论是一致的。

设有一旋转对称转子，相对非惯性系S作定轴转动，S可能是一个真实的刚体（如图6.26），通常叫做“陀螺房”或“支架”，但S也可能并不对应任何真实的刚体，例如它可能是一个莱沙尔标架（图9.43），不妨认为这是一个抽象的“支架”。所谓陀螺力矩是指由于转子在S中转动，而S本身又在转动所产生的作用在转子上的惯性力矩。分别考虑转子转动（角速度为$\dot{\varphi}$）和转子不转动($\dot{\varphi}=0$)两种情况，在这两种情况中惯性力矩之差就得出陀螺力矩，它们就是表9.1中包含$\dot{\varphi}$的各项惯性力矩之和，即

$$陀螺力矩=-J_3\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\,\boldsymbol{n}^0+J_3\dot{\theta}\dot{\varphi}\boldsymbol{s}^0. \qquad (9.44)$$

它就是科氏惯性力对O点的主矩。

陀螺力矩是一个重要且有应用价值的概念，但是不同的教科书和文献对陀螺力矩作了不同的定义，这一点读者看参考书时要注意。有一种定义[①]说，陀螺力矩等于所有惯性力的主矩。从表9.1看到，这样定义的陀螺力矩应该包括七项，除了与$\dot{\varphi}$有关的科氏力矩外还有五项，即三项横向惯性力矩和两项离心惯性力矩。

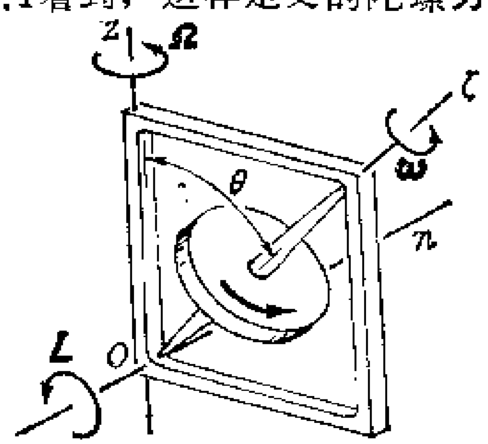


图9.44 求陀螺力矩

例9.20 框架$Oz\zeta$绕Oz轴作匀速进动，进动角速度为$\boldsymbol{\Omega}$。框架中有对称转子绕$O\zeta$轴转动，自转角速度为$\boldsymbol{\omega}$。Oz轴与$O\zeta$轴的夹角为θ。求陀螺力矩，并与惯性力的主矩进行比较。

解 以$\dot{\varphi}=\omega$，$\dot{\psi}=\Omega$和$\theta=$

① 例如洛强斯基等《理论力学》（1955年俄文版）给的定义。

常量代入式(9.44)，得陀螺力矩为

$$\boldsymbol{L}_1 = -J_3\omega\Omega\sin\theta\,\boldsymbol{n}^0.$$

它和6-4中给出的定义 $-\boldsymbol{\Omega}\times J_3\boldsymbol{\omega}$ 是一致的。

由于框架是非惯性参考系，由此引起的全部惯性力矩是（利用表9.1中的结果）

$$\boldsymbol{L}_{\text{惯}} = [(J_1 - J_3)\Omega^2\sin\theta\cos\theta - J_3\omega\Omega\sin\theta]\boldsymbol{n}^0.$$

它比陀螺力矩多一项，即

$$(J_1 - J_3)\Omega^2\sin\theta\cos\theta\,\boldsymbol{n}^0.$$

对于高速转子的慢进动情况，有

$$\omega \gg \Omega,$$

陀螺力矩近似地等于惯性力矩。▌

习　题

9.1　二阶对称张量在平面直角坐标系 Oxy 中的矩阵是

$$\begin{bmatrix} S_x & S_{xy} \\ S_{xy} & S_y \end{bmatrix};$$

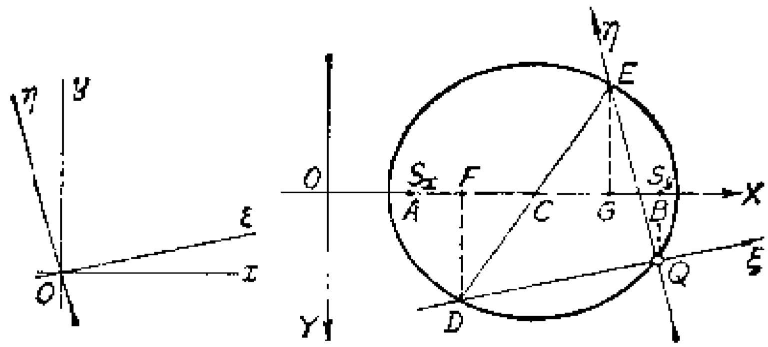
在同一平面上另一直角坐标系 $O\xi\eta$ 中的矩阵是

$$\begin{bmatrix} S_\xi & S_{\xi\eta} \\ S_{\xi\eta} & S_\eta \end{bmatrix}.$$

证明 S_ξ, S_η 和 $S_{\xi\eta}$ 可由 S_x, S_y 和 S_z 按下述方法求得。在X轴（平行于x轴，见下页图所示）上取 $OA = S_x$，$OB = S_y$，取 $BQ = S_{xy}$（向下为正），以 AB 中点 C 为中心，CQ 为半径，作出莫尔圆。由定点 Q 作 QD 平行 ξ 轴，则 D 点的 X, Y 坐标（Y 向下为正）分别是 $S_\xi, S_{\xi\eta}$，而 S_η 可由 $S_\xi + S_\eta = S_x + S_y$ 求得，也等于直径 DE 上 E 点的横坐标。说出怎样用这个圆求矩阵

$$\begin{bmatrix} S_x & S_{xy} \\ S_{xy} & S_y \end{bmatrix}$$

的特征值和特征向量。



题 9.1 图

9.2 设平面刚体对O点的转动惯量和惯积为 J_x, J_y, J_{xy}。证明其主轴与 Ox 轴的夹角为

$$\alpha=\frac{1}{2}\ \text{arc tg}\left(\frac{2J_{xy}}{J_y-J_x}\right).$$

9.3 证明刚体为一薄片（指厚度为零）的必要且充分条件是

$$J_z=J_x+J_y,$$

其中 z 轴垂直于薄片平面，x 和 y 轴在平面内，$Oxyz$ 构成右手正交坐标系。

9.4 质量分别为 $m, 2m, 3m$ 和 $4m$ 的四个质点，分别位于

$$(a,a,a),\ (a,-a,-a),\ (-a,a,-a),\ (-a,-a,a)$$

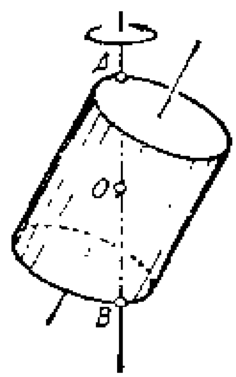
四点上，质点与质点之间用轻刚性杆相连，使这个质点系成为一个刚体。求这个刚体关于坐标原点的主惯量和相应的主轴的方向。

9.5 质量为 M 的薄片，其质心为 C，$C\xi, C\eta$ 是它在薄片平面内的主轴。O点在薄片平面内，Ox, Oy 相应地与 $C\xi, C\eta$ 平行。求证：薄片相对于 Oxy 的惯积是 Mab，其中 a，b 是 C 点在 Oxy 中的坐标。

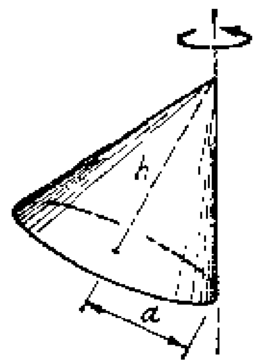
如果薄片关于 $C\xi, C\eta$ 的主惯量分别是 nMa^2, mMb^2，并且薄片在O点有一与 Ox 轴成45°角的主轴，求证

$$(n-1)a^2=(m-1)b^2.$$

9.6 均质圆柱体的质量为 m，高为 h，底半径为 a，A 与 B 是上、下底圆周上的点，且 AB 通过柱体中心 O。求对 AB 轴的转动惯量。



题 9.6 图



题 9.7 图

9.7 均质圆锥体的高为 h，底半径为 a，质量为 m。求对于一条母线的转动惯量。

9.8 均质圆锥体的高为 h，底半径为 a，质量为 m。求在什么条件下，它对经过质心的惯量椭球恰为一圆球？

9.9 均质长方形薄板，质量为 m，长宽为 $a\times b$，O 点是它的中心，u 轴与一对角线重合，v 轴过 O 点且垂直于 u 轴。求转动惯量 J_u，J_v 和惯积 J_{uv}。

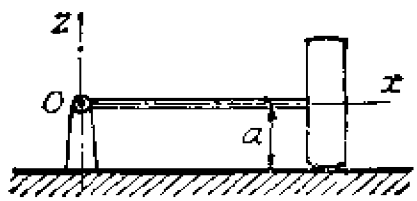
9.10 求证均质正多边形薄板对平面内过中心的任一直线的转动惯量为

$$\frac{1}{12}mR^2\left(2+\cos\frac{2\pi}{n}\right),$$

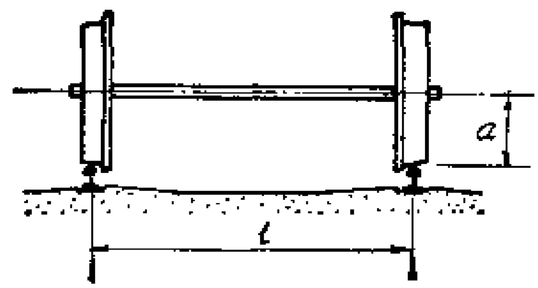
其中 m 是板的质量，R 是外接圆半径，n 是边数。

9.11 碾磨机的滚子重 $P=1200$ 公斤，半径 $a=0.5$ 米，对滚子轴 x 的迴转半径 $\rho=0.4$ 米。滚子只滚不滑，且滚子轴以常角速度 Ω 绕竖直轴 Oz 转动。已知 $\Omega=60$转/分，求碾子对水平底面

的压力N($g=9.8$米/秒^2)。



题 9.11 图



题 9.12 图

9.12 图示轮轴系统，共重$P=1400$公斤，轮子半径$a=75$厘米，迴转半径$\rho=\sqrt{0.55}a$。系统质心以等速度$v=20$米/秒在半径$R=200$米的水平圆周轨道上运动。如果两轮之间的距离$l=1.5$米，求每个车轮对于道轨的正压力N($g=9.8$米/秒^2)。

9.13 一迴转仪，$J_1=J_2=2J_3$，绕其重心旋转并作规则进动。已知自转角速度为ω，自转轴与进动轴之间的夹角$\theta=60°$，求进动角速度Ω。

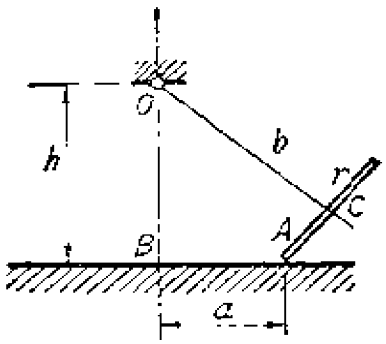
9.14 求证：作定点运动的刚体，如果其动量矩向量与瞬时角加速度向量始终垂直，则此刚体的动能为常值。

9.15 半径为r的均质圆盘的中心C与固定点O之间通过一根刚杆相连，OC垂直盘面，O点为球铰链(见下页图)，并且圆盘在水平面上无滑动地滚动。求证，在接触点A处的动压力可由下式表示

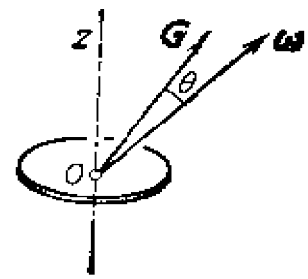
$$N=\frac{ab+hr}{arR^4}[J_3(ab+hr)b-J_1(hb-ar)r]\Omega^2,$$

其中Ω为对称轴OC绕竖直轴OB的转动角速度，$b=OC$，a和h为图中所示的距离，J_1和J_3为圆盘关于O点的主惯量(J_3为绕OC轴的主惯量)，$R^2=b^2+r^2$。

9.16 一刚体绕它的质心O作定点运动，不受外力矩作用。求证：如果刚体的主惯量有关系式$J_1=J_2<J_3$，则它的动量矩向



题 9.15 图



题 9.16 图

量 $\boldsymbol{G}$ 与角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 之间的夹角 $\theta<19.5°$。

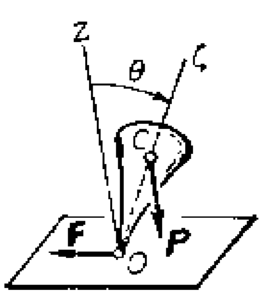
9.17 轴对称的刚体绕对称轴上一定点作规则进动。证明：作用在刚体上的外力对定点的主矩为

$$\boldsymbol{L}_0=J_3(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega})\left(1+\frac{J_3-J_1}{J_3}\cdot\frac{\Omega}{\omega}\cos\theta\right),$$

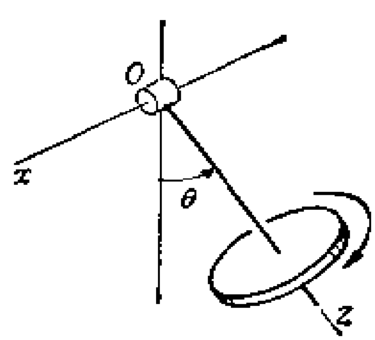
其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为自转角速度，$\boldsymbol{\Omega}$ 为进动角速度，θ 为 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 之间的夹角，J_1 和 J_3 为主惯量（J_3 为绕对称轴的主惯量）。

9.18 一具有对称轴 $O\zeta$ 之刚体绕经过质心 O 的固定轴 Oz 作等速转动。已知角速度大小为 ω，$O\zeta$ 轴和 Oz 轴之间的夹角为 θ，刚体绕 $O\zeta$ 轴的转动惯量为 J_3，绕垂直于 $O\zeta$ 轴之 ξ 轴的转动惯量为 J_1，两轴承与 O 点的距离均为 $l/2$，求轴承上的动压力。

9.19 一重 P 的陀螺绕竖直轴 Oz 作规则进动，它绕对称轴



题 9.19 图



题 9.20 图

$O\zeta$的自转角速度ω远较进动角速度为大。求定点O的水平反作用力的近似值F。已知定点O到质心C之间的距离为a，绕$O\zeta$轴的转动惯量为J_3，$O\zeta$轴与Oz轴的夹角为θ。

9.20　一均质圆盘以角速度ω绕Oz轴转动，Oz轴又绕水平轴Ox摆动，不计摩擦和空气阻力。求证这个圆盘的自转并不影响它的摆动周期(图见上页)。

9.21　一均质圆盘绕其质心作定点运动，不受外力矩作用。初始时给盘一角速度$\boldsymbol{\omega}$，其方向与盘面夹角为α。求圆盘的进动角速度Ω和章动角θ。

9.22　对称陀螺的轴位于竖直位置，陀螺以很大的角速度n作稳定的转动。今突然在对称轴上离开固定点距离为a处作用一冲量$\boldsymbol{I}$，方向垂直于对称轴。求证陀螺在以后的运动中，最大章动角近似地为

$$2\operatorname{arc\,tg}(Ia/J_3n),$$

式中J_3是陀螺绕对称轴的转动惯量。

9.23　一刚体的主惯量$J_1=J_2\neq J_3$，它绕质心作定点运动。已知作用在刚体上的阻尼力矩为一力偶，力偶所在的平面与瞬时转动轴垂直，力偶矩的大小与瞬时角速度成正比，比例系数为λJ_3。求证刚体的瞬时角速度在三根主轴上的分量为

$$\begin{cases}\omega_\xi=a\exp(-\lambda J_3t/J_1)\sin\left(\dfrac{n}{\lambda}e^{-\lambda t}+\varepsilon\right),\\ \omega_\eta=a\exp(-\lambda J_3t/J_1)\cos\left(\dfrac{n}{\lambda}e^{-\lambda t}+\varepsilon\right),\\ \omega_\zeta=\omega_{\zeta0}e^{-\lambda t}.\end{cases}$$

其中a，$\omega_{\zeta0}$，ε，n都是常量，而$n=(J_3-J_1)\omega_{\zeta0}/J_1$。

9.24　一陀螺由半径为$2a$的薄圆盘和垂直盘面且通过圆心C的直杆组成，杆的另一端O为固定点，$OC=a$，不计杆重，陀螺绕O点作定点运动。初始时，杆轴OC与向上竖直线的夹角$\theta=2\alpha$，角速度为$\boldsymbol{\omega}$，方向沿2α角的平分线。求证：经过时间

$$t=\int_{2\alpha}^{0}\frac{d\theta}{\omega\sqrt{1-\cos^2\alpha\sec^2(\theta/2)+k(\cos 2\alpha-\cos\theta)}}$$

后，杆轴将直立起来（即 $\theta=0$），式中 $k=g/(2a\omega^2)$，θ 为任意时刻杆轴 OC 与向上竖直线的夹角。

9.25 一刚体绕质心作定点运动，过质心的主惯量分别为7，25，32个单位。初始角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 沿主轴的方向余弦为（4/5，0，3/5）。求证在任意时刻 t 时角速度向量在三根主轴上的分量分别为

$$\frac{4}{5}\omega\cos\varphi,\quad \frac{4}{5}\omega\sin\varphi,\quad \frac{3}{5}\omega\cos\varphi,$$

其中角 φ 满足关系式

$$\mathrm{tg}(\varphi/2)=\mathrm{th}(3\omega t/10),$$

由此可以推得刚体的角速度最终将沿主惯量为中间值的那个主轴方向。

9.26 一刚性薄板绕其质心作定点运动，外力矩为零，过质心的在板平面内的两根主轴为 $O\xi$ 和 $O\eta$，它们所对应的主惯量分别为 A 和 B（$B>A$）。

$O\xi\eta\zeta$ 是右手直角坐标系。求证：刚体的角速度向量在 $O\xi\eta\zeta$ 上的分量分别是

$$\omega\cos\lambda,\quad \omega\sin\lambda,\quad \dot{\lambda},$$

其中 ω 是常量，λ 满足下列微分方程：

$$2\ddot{\lambda}+k^2\sin 2\lambda=0,\quad k^2=(B-A)\omega^2/(B+A).$$

如果薄板是均质的矩形板，且初始角速度沿着它的一根对角线。求证在以后的运动中，薄板将相继地绕两根对角线转动，并且从初始时刻到第一次绕另一根对角线转动的时间为

$$t=\frac{2}{\omega}(\sec 2\alpha)^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\theta}},$$

其中 2α 是两根对角线之间的夹角。

9.27　一均质的扁方块绕其质心 O 作定点运动，外力矩为零。扁方块的长、宽、高为 $2a, 2a, a$。初始时刚体的角速度为 $\boldsymbol{\Omega}$，方向沿一对角线 OA（A 是方块上的一角顶）。求任意时刻 t 角速度在三根主轴上的分量，并求此时角速度在原来那根对角线 OA 上的投影。

9.28　一长为 $5a$ 的轻刚性杆，其一端 O 固联着半径为 $5a$ 的均质圆球，杆与球表面垂直。杆的另一端固结着一质量与球相等的质点。系统绕固定点 O 可以自由地转动。设初始角速度为 $\boldsymbol{\Omega}$，方向沿 $\overrightarrow{OA}$，A 为球表面上的一点，且 $OA=8a$。求证：在任意时刻 t，角速度在 OA 上的投影是

$$\frac{\Omega}{25}\left[16+9\cos\left(\frac{2}{3}\ \Omega t\right)\right].$$

再证系统的瞬时转动轴在空间划出顶角为 $2\operatorname{arc\,tg}(6/7)$ 的圆锥。

9.29　一均质椭球体绕其质心作定点运动，外力矩为零。初始角速度

$$\boldsymbol{\Omega}=n\boldsymbol{e}_1+3n\boldsymbol{e}_3,$$

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 为过质心的主轴方向的单位向量，相应的主惯量为 $6J$, $3J, J$。求任意时刻 t 的角速度分量 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$，并证明当 t 很大时角速度大小的近似值为 $n\sqrt{5}$。

9.30　一刚体过其质心的主惯量是 J_1, J_2, J_3，它绕一过质心的固定轴转动，角速度在过质心的主轴上的方向余弦 (l_1, l_2, l_3) 是常量，固定轴约束在轴承上，不计摩擦。求证：

（1）刚体的角速度为常量；

（2）刚体作用在轴承上的力偶矩的大小为

$$\omega^2\{[(J_2-J_3)l_2l_3]^2+[(J_3-J_1)l_3l_1]^2+[(J_1-J_2)l_1l_2]^2\}^{\frac{1}{2}},$$

其中 ω 是角速度。

9.31　一均质的旋转对称刚体绕它的质心 O 作定点转动，对

于O点的主惯量是A,A,C。初始角速度$\boldsymbol{\Omega}$在对称轴上的投影为n。作用在刚体上的阻力矩为$-k\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{\omega}$是瞬时角速度。求证：在任意时刻t，瞬时转动轴与对称轴的夹角α由下式给出：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\Omega^2-n^2}\cdot\exp\left[-\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)kt\right].$$

再证：如果刚体是扁形的，则阻力矩将使偏角α减小；如果刚体是细长形的，则将使偏角α增大。

9.32 半径为a，质量为m的均质薄圆盘可绕其边缘上一点A自由地转动。现使它绕着过A点的圆盘上的竖直直径转动，角速度为Ω。有一质量也为m的质点打击在圆盘的水平直径的端点B上，并且粘在圆盘上。假定当质点打击圆盘时有垂直于盘面的速度u，并且和B点的速度同方向。求打击后B点的速度，并证明在A点的反作用冲量为$m(u-a\Omega)/29$。

9.33 质量为m的均质长方形薄板$ABCD$，$AB=2a$，$BC=2b$，板可绕固定点A自由转动，开始时静止。今在C点给一垂直于板面的冲量$\boldsymbol{I}$，证明打击后板的动能为$12I^2/7m$。

如果去掉A点的约束而使板完全自由，开始时静止，求在C点受到同样的打击时板的动能和B,C点的速度。

9.34 高为h，质量为m，半顶角为$\pi/4$的均质圆锥体绕它的顶点O作定点运动，外力对O点的主矩为零。初始角速度$\boldsymbol{\Omega}$沿它的一条母线方向。取定系的Oz轴在动量矩$\boldsymbol{G}$的方向，求在以后的运动中角速度在莱沙尔坐标中的分量和O点的反力。（提示：锥体关于O点的主惯量是$3mh^2/4$，$3mh^2/4$，$3mh^2/10$，见9.8题）

9.35 半径为a的均质薄球壳，质心为C，在重力作用下绕它表面上一点O作定点运动。半径OC与向上竖直线Oz之间的夹角为θ，平面zOC与固定竖直面之间的夹角为ψ。初始时，$\theta=\pi/2$，$\dot{\theta}=0$，$\dot{\psi}=2n/5$，其中$n=\sqrt{15g/2a}$是球壳绕OC轴的自转角速度。求证：

（1）当 $t\to\infty$ 时，$\theta\to 0$；

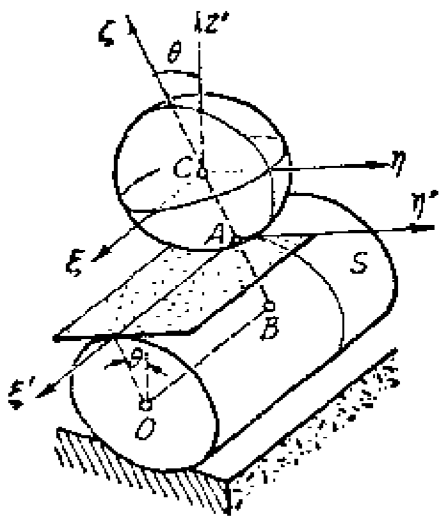
（2）C 点在以 O 为球心，a 为半径的固定球面上画出螺旋轨迹。

（解9.36—9.40题时可参照9-5中例9.17，图9.39。）

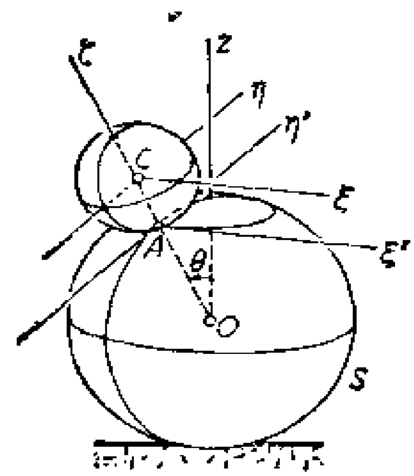
9.36 半径为 a 的均质圆球在水平横放的不动的半径也为 a 的粗糙圆柱面 S 上作纯滚动。初始时球在柱的顶端以角速度 Ω 绕过其质心 C 的竖直轴转动，当受到小扰动后球将滚离顶端，取 AC 与向上竖直线的夹角为 θ，A 为接触点。求证：

（1）在以后的运动中，有 $7a\dot{\theta}^2=5g(1-\cos\theta)$；

（2）圆球角速度在 AC 方向上的投影为 $\Omega\cos\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\theta\right)$。



题 9.36 图



题 9.37 图

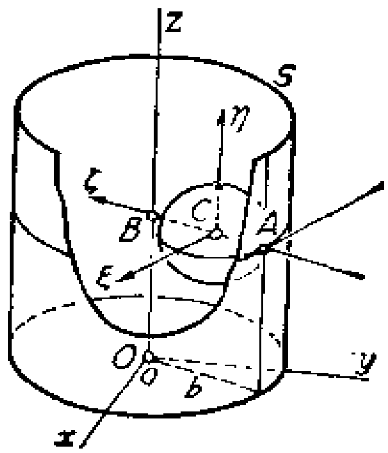
9.37 半径为 a 的小球 C 在半径为 b 的粗糙的固定大球面 S 上作纯滚动。取两球连心线 OC 与向上竖直轴 Oz 之间的夹角为 θ，小球角速度在 OC 方向上的投影为 ω_3。求证：$\theta=\theta_0$（常量），$\dot{\psi}=P$（常量），且

$$\omega_3^2\geqslant 35\cdot\frac{a+b}{a^2}\cdot g\cos\theta_0$$

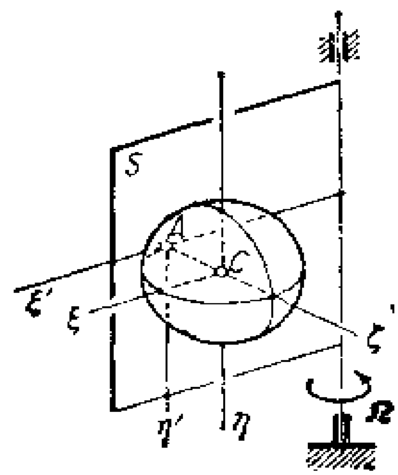
是小球的一种可能的运动，$\dot{\psi}$ 是平面 $zO\zeta$ 绕 Oz 轴的转动角速

度。

9.38 半径为 a，质量为 m 的圆球在半径为 $b(>a)$，内表面粗糙的竖直固定圆筒的内壁上作纯滚动。求证：球心 C 在竖直方向的运动将是简谐运动或匀速直线运动。



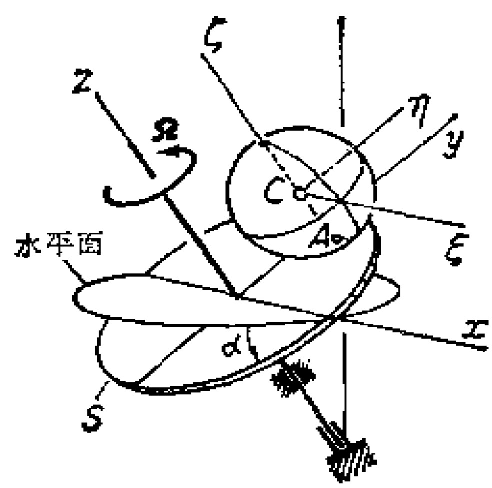
题 9.38 图



题 9.39 图

9.39 一相当粗糙的平面绕着平面内一竖直线以常角速度 Ω 转动。一均质圆球在重力作用下沿平面作纯滚动，初始时圆球相对平面无运动。求证在以后的运动中球心永远不会低于它初始水平面以下 $5g/\Omega^2$ 的位置。

9.40 一均质圆球在一倾斜的平板上无滑动地滚动，平板与水平面的夹角为 α，并且以常角速度 Ω 绕着垂直于平板的一固定线作定轴转动。如果初始时球心速度为零，求证在以后的运动中球心在两个相距为 $\left(\frac{35g}{2\Omega^2}\right)\sin^2\alpha$ 的水平面之间运动，并且以一个水平面运动到另一个水平面的时间为 $7\pi/2\Omega$。



题 9.40 图

第十章 分析力学初步

由第四章的讨论知道，描述一个自由质点的运动需要三个变量，对应三个二阶微分方程，那么由n个自由质点组成的质点系应该对应$3n$个方程。实际问题中经常遇到的情况是，质点系中各质点在运动过程中，其位置与速度受到某些限制，即受到约束。这样的质点系被称为受约束质点系或非自由系。描述它们就不需要那么多变量和方程了。研究非自由系的问题，首先是要选择合适的变量和列出合适的运动微分方程。

在此以前，动力学问题基本上建立在牛顿定律的基础上，简称**牛顿力学**①，其特点是考虑力、速度和加速度为基本量，它们都是向量②，在分析问题时几何直观性强。但是在质点系，特别是非自由系问题中，应用牛顿定律和向量工具就显得复杂而费力。在第七章中已看到，把能量与功作为基本量来考虑问题有其优越性。在第二章中作了曲线坐标及矩阵工具方面的知识准备，这就为讨论非向量的分析方法提供了基础。

1788 年拉格朗日 (Joseph Louis Lagrange 1736—1813) 写了《分析力学》这本书，全书根据一个虚位移原理，用严格的分析方法来处理所有的力学问题（静力学、动力学、流体静力学和流体动力学）。他本人十分骄傲于"全书没有一张图"③。他通过一个机械系统，导出了拉格朗日形式的动力学方程。这种形

---

① 名词并不统一，有的书上把整个经典力学称为牛顿力学，以区别于相对论力学、量子力学。

② 因而牛顿力学有时也叫向量力学，以区别于分析力学。

③ 但是，我们并不认为"没有一张图"就反映了它的特点，而且这也不是一个值得仿效的好主意。实际上在现代科学技术中，图（以及它本身的各种理论）是一种必不可少的重要工具。

式的方程具有普遍的意义，特别适用于研究非自由系的力学问题，在理论和应用两方面，对十九世纪力学的发展方向产生很大的影响。以拉格朗日方程为基础的力学可简称为**拉格朗日力学**。

分析力学的另一个代表人物是哈密顿（William Rowan Hamilton 1805—1865）。他在1834年提出了可以作为力学基本原理的哈密顿原理，以及哈密顿形式的动力学方程，以此为基础的力学简称为**哈密顿力学**①。

拉格朗日力学和哈密顿力学（还有其他一些内容）可统称为“分析力学”，以区别于原来的“向量力学”。这是沿用了拉格朗日原著的名称。牛顿力学（或向量力学）和分析力学尽管有各自的特点，但并非独立无关的，它们具有同样的适用范围，都属于“经典力学”的范畴。它们的基本原理以及理论结果都是相互联系着的。

分析力学的理论内容牵涉很广，应用方面涉及工程技术、天体力学、理论物理、……诸方面，形成一个力学的专门分支。本章仅以拉格朗日方程为主体介绍分析力学的初步知识。

10-1 质点的拉格朗日方程

先考虑一个不受约束的自由质点M，它的曲线坐标为q_1, q_2, q_3，则向径$\overrightarrow{OM}$可表示成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_1,q_2,q_3,t),$$

它的速度是

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\sum_i \dot{q}_i \boldsymbol{e}_i+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}, \tag{10.1}$$

① 哈密顿形式的动力学方程，实际上于1809年已为拉格朗日所得到，泊松（Poisson）也在同一年导出相似的方程，但他们都没有认为这是一组基本的动力学方程．认识到这一点的首先是柯西（Cauchy 1831年）．哈密顿于1834年由一个基本的变换原理，导出了这一组基本方程，并以此为基础展开了后世人所称的哈密顿力学．以后许多学者的工作使哈密顿力学发展成如今这样完善的程度，并得到了广泛的应用．

其中

$$e_i=\frac{\partial r}{\partial q_i}\quad (i=1,2,3)$$

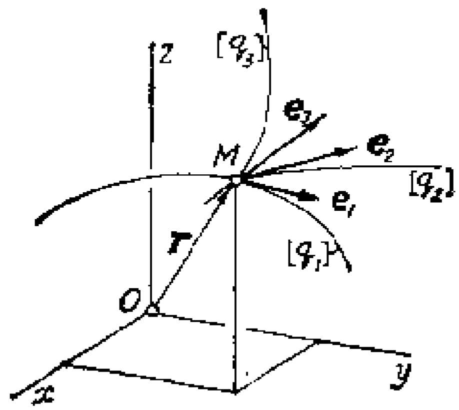


图10.1 基向量

是沿坐标曲线$[q_i]$的基向量（图10.1），求和记号$\sum\limits_i$代表由$i=1$加到$i=3$。

由于基向量e_i是q_j的函数$(j=1,2,3)$，它与$\dot{q}_j$无关，所以将式(10.1)分别对q_j和$\dot{q}_j$求导可得

$$\frac{\partial v}{\partial q_j}=\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial e_i}{\partial q_j}+\frac{\partial^2 r}{\partial q_j\partial t}, \tag{10.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \dot{q}_j}=e_j. \tag{10.3}$$

再求出e_i的全导数得

$$\dot{e}_j=\sum_i\frac{\partial e_j}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial e_i}{\partial t}. \tag{10.4}$$

因为有关系式

$$\frac{\partial e_i}{\partial q_j}=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial r}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial r}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial e_j}{\partial q_i},$$

比较(10.2)与(10.4)可得关系式

$$\frac{\partial v}{\partial q_j}=\dot{e}_j. \tag{10.5}$$

(10.3)与(10.5)两式将基向量和速度向量的偏导数联系起来，它们是推导拉格朗日方程时的两个关键的关系式。

质点的加速度a与基向量e_j的点积是

$$a\cdot e_j=\frac{dv}{dt}\cdot e_j=\frac{d}{dt}(v\cdot e_j)-v\cdot\frac{de_j}{dt}.$$

用式(10.3)和(10.5)代入，得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_j=\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\dot{q}_j}\right)-\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial q_j}$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right).$$

因为

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{m}T,$$

其中T是质点的动能，m是它的质量。上式可以改写成为

$$m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_j=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}. \tag{10.6}$$

考虑牛顿定律

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}.$$

这个向量方程在$\boldsymbol{e}_j$基上的点积为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_j, \tag{10.7}$$

其中$\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_j$是一个标量，记作$Q_j$，称为对应于曲线坐标$q_j$的广义力。最后得出

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j\quad(j=1,2,3). \tag{10.8}$$

这就是自由质点的拉格朗日形式的动力学方程，简称**自由质点的拉格朗日方程**。

如果力$\boldsymbol{F}$有势，即存在势能函数$V(q_1,q_2,q_3)$，则$\boldsymbol{F}$的元功可以写成全微分

$$dW=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}\cdot\left(\sum_i\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i}dq_i\right)$$

$$=\sum_i(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_i)dq_i=\sum_i Q_i dq_i.$$

另一方面有

$$dW = -dV = \sum_i \left(-\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) dq_i.$$

由此两式可知广义力与势能函数之间的关系为

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \tag{10.9}$$

广义力 Q_j 名为力，实际上并不一定具有力的量纲，从一个简单的物理说明中就可以看出这一点。设想三个曲线坐标中只让其中一个 q_j 作变动，则力 $\boldsymbol{F}$ 的元功为

$$dW = Q_j dq_j.$$

等式左边的量纲是功的量纲，即[力]×[长度]，因此如 dq_j 是角度，即为无量纲量，那么对应的广义力的量纲与力矩的量纲一致。

对广义力的另一种理解是：如果让相应的曲线坐标作单位值改变，且其余坐标不变，则广义力的数值等于外力所作的功。

将式(10.9)代入(10.8)，得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

将动能与势能之差记作 $L = T - V$，L 称为**拉格朗日函数**。因为 $\partial V/\partial \dot{q}_j = 0$，所以拉格朗日方程便可写成

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1,2,3). \tag{10.10}$$

以上推导是对于任意曲线坐标（无论正交与否）进行的。我们清楚地看出，拉格朗日方程的特点是它对于任意曲线坐标具有统一的形式。这不仅在应用时便于记忆，而且从理论上看，它揭示了各种曲线坐标在描述质点的动力学行为时的共性。

拉格朗日方程的另一个特点是，方程中牵涉的量是动能、势能、广义力和曲线坐标，它们都是数量。这与以前的动力学方程

采用向量的表达形式是不相同的。

例10.1 设自由质点在万有引力作用下运动，写出在球坐标中质点的拉格朗日方程。又设质点受到的力是$\boldsymbol{F}$，求出球坐标中的广义力。

解 曲线坐标是(r,θ,φ)，动能的表达式为

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta),$$

势能为

$$V=-\frac{\mu m}{r},$$

其中μ为常量。所以拉格朗日函数为

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{\mu m}{r}.$$

代入式(10.10)得

$$\begin{cases}m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)=-\dfrac{\mu m}{r^2},\\ m\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})-r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta=0,\\ m\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta)=0.\end{cases}$$

如果所给定的力$\boldsymbol{F}$是一般的力，就应该用式(10.8)，则以上三个式子的右边分别是广义力Q_r,Q_θ,Q_φ。已知在球坐标系中拉梅系数h_r,h_θ,h_φ分别是$1,r,r\sin\theta$。根据广义力的定义应有

$$Q_r=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_r=h_r\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_r^0=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_r^0=F_r,$$

$$Q_\theta=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\theta=h_\theta\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\theta^0=r\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\theta^0=rF_\theta,$$

$$Q_\varphi=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi=h_\varphi\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi^0=r\sin\theta\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi^0=r\sin\theta F_\varphi.$$

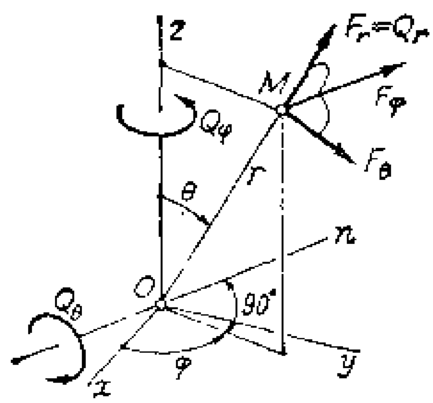


图10.2　球坐标中的广义力

参考图10.2可知，广义力 Q_r 就是力 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{e}_r^0$ 方向的分量，广义力 Q_θ 是力 $\boldsymbol{F}$ 对图中 On 线的力矩，而 Q_φ 是力 $\boldsymbol{F}$ 对 Oz 轴的力矩。▌

＊＊＊　仿照例10.1，写出在直角坐标系及柱坐标系中质点的拉格朗日方程。分析相应的广义力的量纲，如果是力矩，说明它代表对哪一根轴的矩。＊＊＊

***质点的拉格朗日方程的显式**

从理论上看，拉格朗日方程(10.8)的形式很简单，但是在具体应用时，还需要写成曲线坐标的显式才行，象在例10.1中所做的那样。下面推导在最一般的曲线坐标系（包括正交的和非正交的）中质点的拉格朗日方程的显式。

质点的动能表达式为

$$T=\frac{m}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{m}{2}\left(\sum_i \dot{q}_i\boldsymbol{e}_i\right)\cdot\left(\sum_j \dot{q}_j\boldsymbol{e}_j\right)$$

$$=\frac{m}{2}\sum_i\sum_j g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \qquad (10.11)$$

其中 $g_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$ 叫做度规系数。显然有 $g_{ij}=g_{ji}$。以 g_{ij} 为元素组成的矩阵 $\mathbf{G}=[g_{ij}]$ 叫做**度规矩阵**。容易证明度规矩阵 $\mathbf{G}$ 和雅可比矩阵 $\mathbf{P}$(见式(2.42)) 的关系是(参见2-4)

$$\mathbf{G}=\mathbf{P}^T\mathbf{P},$$

因而它的行列式不等于零，必定存在逆矩阵 $\mathbf{G}^{-1}$。设矩阵 $\mathbf{G}^{-1}$ 的元素记作 $g^{(ij)}$。由矩阵的性质可知

$$\sum_j g^{(ij)}g_{jk}=\delta_{ik}=\begin{cases}0, & i\neq k,\\ 1, & i=k.\end{cases} \qquad (10.12)$$

基向量 $\boldsymbol{e}_i$ 对 q_j 的偏导数也是一个向量，我们把它分别在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 方向分解，在 $\boldsymbol{e}_k$ 方向的分量用记号 $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ 表示，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial q_j}=\sum_k \left\{ {k \atop ij} \right\} \boldsymbol{e}_k. \tag{10.13}$$

由于

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial q_i},$$

因而有

$$\left\{ {k \atop ij} \right\}=\left\{ {k \atop ji} \right\}.$$

下面将这些分量计算出来。将度规系数 g_{ij} 对 q_l 求导，并以式(10.13)代入得

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l}&=\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial q_l}\cdot \boldsymbol{e}_j+\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial q_l}\cdot \boldsymbol{e}_i\\&=\left(\sum_s \left\{ {s \atop il} \right\}\boldsymbol{e}_s\right)\cdot \boldsymbol{e}_j+\left(\sum_s \left\{ {s \atop jl} \right\}\boldsymbol{e}_s\right)\cdot \boldsymbol{e}_i,\end{aligned}$$

由此得出

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l}=\sum_s\left[\left\{ {s \atop il} \right\}g_{js}+\left\{ {s \atop jl} \right\}g_{is}\right]. \tag{10.14}$$

将上式的指标 (i,j,l) 轮换成 (j,l,i) 得

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial q_i}=\sum_s\left[\left\{ {s \atop ji} \right\}g_{ls}+\left\{ {s \atop li} \right\}g_{js}\right]. \tag{10.15}$$

同样将(10.14)中 (i,j,l) 轮换成 (l,i,j)，有

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial q_j}=\sum_s\left[\left\{ {s \atop lj} \right\}g_{is}+\left\{ {s \atop ij} \right\}g_{ls}\right]. \tag{10.16}$$

将式(10.15)加上(10.16)减去(10.14)并除以 2，注意到

$$\left\{ {s \atop ij} \right\} = \left\{ {s \atop ji} \right\},$$

最后可得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l}\right) = \sum_s \left\{ {s \atop ij} \right\} g_{ls}. \qquad (10.17)$$

这是关于$\left\{ {1 \atop ij} \right\}$,$\left\{ {2 \atop ij} \right\}$,$\left\{ {3 \atop ij} \right\}$ 的三个联立方程 ($l=1,2,3$)．为了解出其中某一个$\left\{ {k \atop ij} \right\}$，将(10.17)乘 $g^{(kl)}$，并对 l 求和，再利用(10.12)，即

$$\sum_l g^{(kl)} g_{ls} = \delta_{ks},$$

得

$$\left\{ {k \atop ij} \right\} = \sum_l g^{(kl)} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l}\right)\right].$$

上式方括号中的式子叫做**克氏** (Christoffel) **第一类记号**，可用记号$[ij,l]$或$[ji,l]$表示，即

$$[ij,l] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l}\right),$$

而$\left\{ {k \atop ij} \right\}$叫做**克氏第二类记号**，于是两类克氏记号之间的关系是

$$\left\{ {k \atop ij} \right\} = \sum_l g^{(kl)} [ij,l]. \qquad (10.18)$$

下面推导拉格朗日方程的显式。根据式(10.11)，得

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{m}{2}\left(\sum_i g_{ik}\,\dot{q}_i + \sum_j g_{jk}\,\dot{q}_j\right),$$

上式括号中两项实际上是相同的，由于推导上的需要，有意

保留这种分开的形式。由上式可得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)=m\left[\sum_i g_{ik}\ddot{q}_i+\frac{1}{2}\sum_i\left(\sum_j\frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\dot{q}_i\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_j\left(\sum_i\frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)\dot{q}_j\right].$$

求T对q_k的偏导数，得

$$\frac{\partial T}{\partial q_k}=\frac{m}{2}\sum_i\sum_j\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

代入式(10.8)，并利用克氏第一类记号，最后可以得出运动微分方程，即

$$m\left(\sum_i g_{ik}\ddot{q}_i+\sum_i\sum_j[ij,k]\dot{q}_i\dot{q}_j\right)=Q_k. \quad (10.19)$$

这样的式子共有三个，即$k=1,2,3$。

这种显式还可以化成另一种形式，就是把二阶导数$\ddot{q}_i$解出来。设力$\boldsymbol{F}$在基向量$\boldsymbol{e}_l$中的分量是F_l，即

$$\boldsymbol{F}=\sum_l F_l\boldsymbol{e}_l.$$

必须注意F_l和广义力Q_l的意义不一样，它们之间的关系为

$$Q_k=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_k=\left(\sum_l F_l\boldsymbol{e}_l\right)\cdot\boldsymbol{e}_k=\sum_l g_{lk}\boldsymbol{F}_l,$$

由此反解出F_l，得

$$F_l=\sum_k g^{(lk)}Q_k.$$

将式(10.19)乘$g^{(lk)}$，并对k求和，可求出$\ddot{q}_l$，即

$$m\left(\ddot{q}_l+\sum_i\sum_j\left\{{l\atop ij}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j\right)=F_l \quad (l=1,2,3). \quad (10.20)$$

方程(10.20)也可以直接由加速度$\boldsymbol{a}$在基$\boldsymbol{e}_l$上的分量a_l导

出。因为有

$$\boldsymbol{a}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}=\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i\boldsymbol{e}_i\right)=\sum_i(\ddot{q}_i\boldsymbol{e}_i+\dot{q}_i\dot{\boldsymbol{e}}_i),$$

但是 $$\dot{\boldsymbol{e}}_i=\sum_j\frac{\partial\boldsymbol{e}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j=\sum_j\sum_l\left\{{l \atop ij}\right\}\dot{q}_j\boldsymbol{e}_l,$$

又因为 $$\sum_i\ddot{q}_i\boldsymbol{e}_i=\sum_l\ddot{q}_l\boldsymbol{e}_l,$$

所以，最后得

$$\boldsymbol{a}=\sum_l\left(\ddot{q}_l+\sum_i\sum_j\left\{{l \atop ij}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j\right)\boldsymbol{e}_l.$$

将牛顿第二定律$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$写成

$$m\left(\sum_l a_l\boldsymbol{e}_l\right)=\sum_l F_l\boldsymbol{e}_l,$$

则方程 $ma_l=F_l(l=1,2,3)$就是式(10.20)。注意，这里 a_l 是 $\boldsymbol{a}$ 的分量，不是投影，也不是 $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{e}_l$的点积，而式(10.6)中给出的是点积。

下面给出一个非正交曲线坐标的例子，以便加深对上面内容的理解。

例10.2 设曲线坐标 (q_1,q_2,q_3) 与直角坐标的关系是

$$\begin{cases}q_1=\dfrac{2}{3}\left(x-\dfrac{1}{4}y^2\right),\\ q_2=2y,\\ q_3=z.\end{cases}$$

q_1,q_2的坐标曲线都在Oxy平面上(图10.3)，q_3 就是 z，不另外画出。

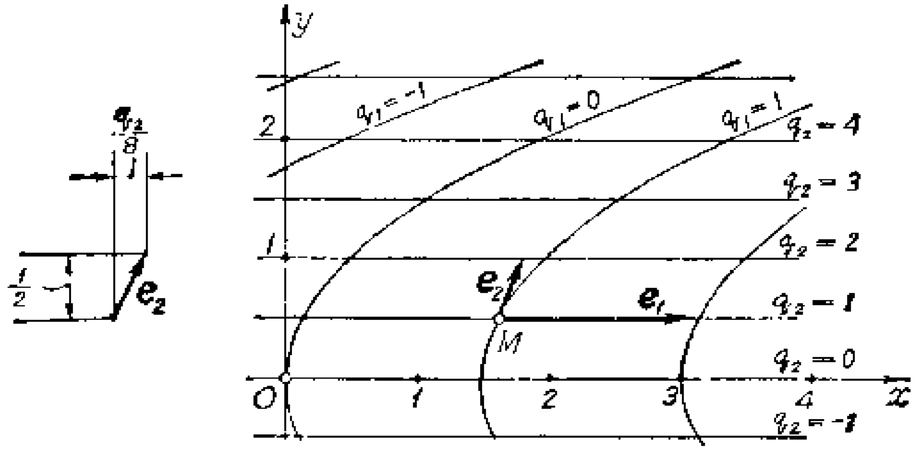


图10.8　非正交曲线坐标系的例子

基向量为

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{8}q_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

上式右端的3×3阶矩阵就是雅可比矩阵 $\mathbf{P}$。

度规矩阵为

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{3}{16}q_2 & 0 \\ \frac{3}{16}q_2 & \frac{1}{4} + \frac{1}{64}q_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

它的逆矩阵是

$$\mathbf{G}^{-1} = [g^{(ij)}] = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} + \frac{1}{36}q_2^2 & -\frac{1}{3}q_2 & 0 \\ -q_2/3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

在 g_{ij}中只有g_{12}, g_{21}, g_{22}与q_2有关，所以在计算克氏第一

类记号时除了

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial q_2}=\frac{\partial g_{21}}{\partial q_2}=\frac{3}{16}, \qquad \frac{\partial g_{22}}{\partial q_2}=\frac{1}{32}q_2$$

以外，其余偏导数均为零。于是得克氏第一类记号为

$$[12,2]=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{12}}{\partial q_2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial q_1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial q_2}\right]=0,$$

$$[22,1]=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{21}}{\partial q_2}+\frac{\partial g_{21}}{\partial q_2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial q_1}\right]=\frac{3}{16},$$

$$[22,2]=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{22}}{\partial q_2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial q_2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial q_2}\right]=\frac{1}{64}q_2,$$

其余二十四个克氏第一类记号全部为零。

克氏第二类记号为

$$\left\{\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right\}=g^{(11)}[22,1]+g^{(12)}[22,2]+g^{(13)}[22,3]$$

$$=\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{36}q_2^2\right)\cdot\frac{3}{16}+\left(-\frac{1}{3}q_2\right)\cdot\frac{1}{64}q_2+0=\frac{1}{12},$$

其余二十六个克氏第二类记号都为零。

下面求力 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 中的分量 F_1,F_2,F_3 和广义力 Q_1,Q_2,Q_3。

因为

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}q_2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\ F_x-\frac{1}{6}q_2F_y\\2F_y\\F_z\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\end{bmatrix}=P^T\begin{bmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3F_x/2\\\frac{1}{8}q_2F_x+\frac{1}{2}F_y\\F_z\end{bmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k}$，而且与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 正交，所以必然有 $F_3=F_z$，$Q_3=F_z$。我们着重看一看F_1,F_2和 Q_1,Q_2 的几何意义。

在坐标曲面$q_3=$常数(即$z=$常数，也就是平行于 Oxy 的平面）上，$\boldsymbol{F}'=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}$($\boldsymbol{F}'$ 是 $\boldsymbol{F}$在此平面上的分量)，它与 F_1,F_2 以及 Q_1,Q_2 的关系如图 10.4 所示。

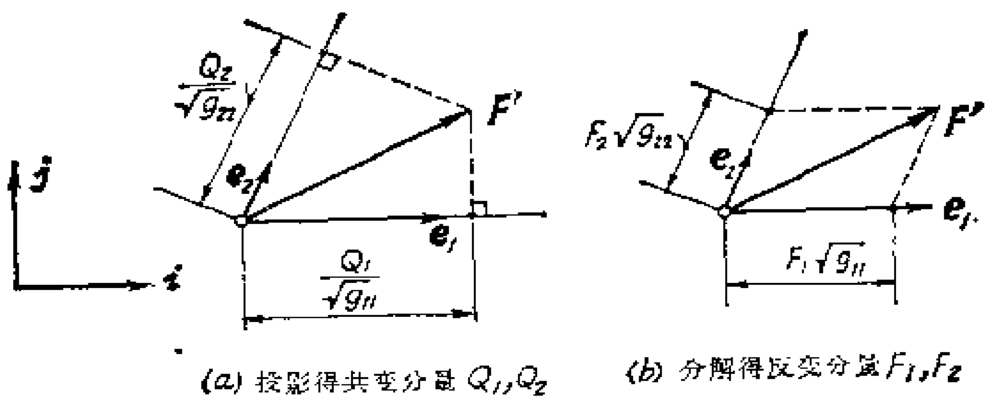


图10.4 共变分量和反变分量

它们分别与初等向量代数中的“投影”和“分解”相对应（如果 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 是两个正交的单位向量，那么两者就没有差别）。在张量代数中，Q_1,Q_2,Q_3叫做$\boldsymbol{F}$的共变分量（也叫协

变分量），F_1, F_2, F_3叫做$\boldsymbol{F}$的反变分量（也叫逆变分量）。

代入式(10.19)得质点的运动微分方程为

$$
\begin{cases}
m\left(\dfrac{9}{4}\ddot{q}_1+\dfrac{3}{16}q_2\, q_2+\dfrac{3}{16}\dot{q}_2^2\right)=Q_1, \\
m\left(\dfrac{3}{16}q_2\ddot{q}_1+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{64}q_2^2\right)\ddot{q}_2+\dfrac{1}{64}q_2\dot{q}_2^2\right]=Q_2, \\
m\ddot{q}_3=Q_3,
\end{cases}
$$

其中 $\dot{q}_2^2$ 的系数 3/16 和 $q_2/64$ 就是克氏第一类记号[22,1]和[22,2]的值。

代入式(10.20)得

$$
\begin{cases}
m\left(\ddot{q}_1+\dfrac{1}{12}\dot{q}_2^2\right)=F_1, \\
m\ddot{q}_2=F_2, \\
m\ddot{q}_3=F_3.
\end{cases}
$$

这里 $\dot{q}_2^2$ 的系数就是克氏第二类记号$\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}$的值。 ▌

* * *　直接用拉格朗日方程(10.8)展开，以验证上例的结果。* * *

对于正交的曲线坐标，度规矩阵是对角型的（参见 2-4 中式(2.47)）

$$
[g_{ij}]=\begin{bmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{bmatrix},
$$

其中 h_1, h_2, h_3 是拉梅系数。在计算克氏记号时，容易验证，当三个指标互异时克氏第一类记号和第二类记号均为零。当有两个或三个指标相同时公式是（式中 $i\neq j$）

$$
[ii,j]=-h_i\frac{\partial h_i}{\partial q_j},
$$

$$[ij,i]=[ji,i]=h_i\frac{\partial h_i}{\partial q_j},$$

$$[ii,i]=h_i\frac{\partial h_i}{\partial q_i},$$

$$\begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} i \\ ji \end{Bmatrix}=\frac{1}{h_i}\cdot\frac{\partial h_i}{\partial q_j}=\frac{\partial(\ln h_i)}{\partial q_j},$$

$$\begin{Bmatrix} i \\ jj \end{Bmatrix}=-\frac{h_j}{h_i^2}\cdot\frac{\partial h_j}{\partial q_i},$$

$$\begin{Bmatrix} i \\ ii \end{Bmatrix}=\frac{1}{h_i}\cdot\frac{\partial h_i}{\partial q_i}.$$

将这些关系式代入式(10.19)或(10.20)就可以得到一般正交曲线坐标系中拉格朗日方程的显式。

例10.3 求柱坐标 (ρ,φ,z) 中非零的克氏记号，并写出质点的运动微分方程。

解 度规矩阵为

$$[g_{ij}]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

逆矩阵为

$$[g^{(ij)}]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

克氏第一类记号为

$$[\theta\theta,\rho]=-\rho,$$
$$[\rho\theta,\theta]=[\theta\rho,\theta]=\rho.$$

其余的都是零。非零的克氏第二类记号有三个，它们是

$$\begin{Bmatrix} \rho \\ \theta\theta \end{Bmatrix}=-\rho,\quad \begin{Bmatrix} \theta \\ \rho\theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \theta \\ \theta\rho \end{Bmatrix}=\frac{1}{\rho}.$$

代入式(10.20)得质点的运动微分方程为

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)=F_\rho, \\ m\left(\ddot{\theta}+\dfrac{2}{\rho}\dot{\rho}\dot{\theta}\right)=\dfrac{1}{\rho}F_\theta \\ m\ddot{z}=F_z. \end{cases}$$

这与我们以前得到的牛顿定律在柱坐标中的分量式一致。 ▌

*** 计算直角坐标及球坐标 中非零的克氏记号。***

分析力学主要是研究受约束质点系的运动，下面先讨论受约束质点的拉格朗日方程。在 4-8 中已经讲过，限制质点自由运动的条件就是约束。约束的形式多种多样，可以从几种不同的角度进行分类。为了使定义普遍化，设受约束的对象是由 n 个质点组成的质点系，当 $n=1$ 时就是本节所讨论的质点的情况。

(一) 位置约束和速度约束

对各质点的空间位置所加的限制称为**位置约束**，或**几何约束**。对应的约束方程为

$$f_i(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n,t)=0.$$

独立的约束方程可以有好几个， 这里可以有 $i=1,2,\cdots,k$，而 $k<3n$。

不仅对位置而且对速度所加的限制称为**速度约束**，或**运动约束**、**微分约束**。对应的约束方程为

$$f_i(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_n,t)=0.$$

具有速度约束的问题将在10-8中讨论。

(二) 定常约束和非定常约束

若约束方程中不显含时间变量 t，则它称为**定常约束**①；反之

① scleronomic 来自希腊文，原意是固定的。

称为**非定常约束**[①]。以$n=1$的情况为例，设 q_1,q_2,q_3 为任意取定的曲线坐标，则几何约束方程可表示成

$$f(q_1,q_2,q_3,t)=0. \tag{10.21}$$

上式中 f 显含 t 表示约束是非定常的。对于确定的时刻 t，这是三维空间中的一个曲面。约束方程（10.21）表示质点受到这样的限制：在时刻 t，它必须在曲面

$$f(q_1,q_2,q_3,t)=0$$

上，而在时刻 $t+\Delta t$，它又必须在曲面

$$f(q_1,q_2,q_3,t+\Delta t)=0$$

上（图10.5）。对于定常约束情况，约束方程成为

$$f(q_1,q_2,q_3)=0,$$

这表示质点在运动过程中被约束在空间一个固定的曲面上。

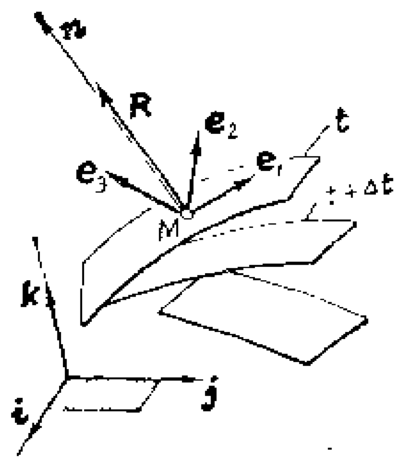


图10.5 约束曲面在变动

（三）双向约束和单向约束

约束的方程以等号形式出现时，它称为**双向约束**，以不等号形式出现时，例如

$$f_i(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n,t)\geqslant 0,$$

则称为**单向约束**。一个质点M与固定点O之间用长为 l 的绳子连结，向径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 受到限制 $|\boldsymbol{r}|\leqslant l$。这是单向约束。将绳子改为刚性杆，则为双向约束。

以上三类情况互相搭配就可能出现多种形式的约束情况。在本书中，如无说明，即指双向约束的情况。

现在分析受约束的质点。它和自由质点比较，在两方面出现新的问题。一是由于存在约束，增加了作用在质点上的约束力，一

---

① rheonomic 来自希腊文，原意是流动的。

般说来它是质点的位置、速度和时间的函数。从这个角度看未知量增加了。二是描述质点位置的三个坐标并非完全独立。从这个角度看未知量是减少了。因此，选择哪几个未知量才能组成动力学问题的完全方程组是应该讨论的中心问题。

受约束质点的外力有两部分，一部分是主动力 $\boldsymbol{F}$；另一部分是约束力 $\boldsymbol{R}$。此时质点的牛顿动力学方程为

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}.$$

任意取定曲线坐标 q_1,q_2,q_3，与自由质点情况类似，不难导出质点的拉格朗日形式的方程是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}_j, \tag{10.22}$$

其中$j=1,2,3$；Q_j 表示与主动力相应的广义力；而$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}_j$ 是与约束力相应的广义力。

我们假设约束面是光滑的，即它对质点的约束力 $\boldsymbol{R}$总是与曲面垂直（图10.5）。沿约束面$f=0$[①]的法线方向的一个向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z},$$

则 $\boldsymbol{R}$可表示成为

$$\boldsymbol{R}=\lambda\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right), \tag{10.23}$$

其中 λ 是一个待定的乘子，只要 λ 知道了，约束力也就可以确定。

由于

$$\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{i}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\boldsymbol{j}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\boldsymbol{k}\frac{\partial z}{\partial q_j},$$

与式(10.23)一起可得

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}_j=\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_j}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_j}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_j}\right)=\lambda\frac{\partial f}{\partial q_j}.$$

① 注意，同一个f用直角坐标(x,y,z)表示和用曲线坐标(q_1,q_2,q_3)表示时，函数形式是不同的。

将它代入式(10.22)得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_j}\quad (j=1,2,3)。\qquad (10.24)$$

这个方程称为非自由质点的**第一类拉格朗日方程**。方程中除了包含描述运动的未知函数 q_1,q_2,q_3 以外，还包含一个描述约束力大小的未知函数λ，λ称为**拉格朗日乘子**。如果要求出全部四个未知函数，必须将式(10.24)和约束方程(10.21)联立。

同理，如果质点同时受到两个约束，约束方程是

$$\begin{cases}f_1(q_1,q_2,q_3,t)=0,\\ f_2(q_1,q_2,q_3,t)=0。\end{cases}\qquad (10.25)$$

这表示质点被约束在空间曲线上。在约束是光滑的情况下（图10.6），此时不难导出质点的第一类拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial q_j}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial q_j}\quad (j=1,2,3)。\qquad (10.26)$$

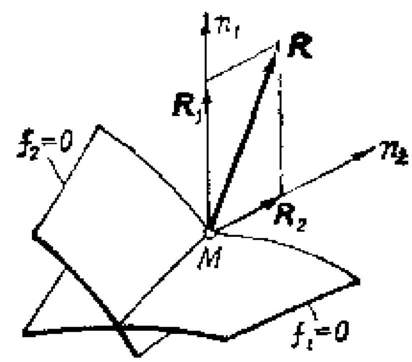


图10.6 两个约束的情况

方程中包含两个拉格朗日乘子 λ_1 和 λ_2，将式(10.26)和(10.25)联立，一共可以解出五个未知函数。

例10.4 单摆在一竖直平面内运动，摆长 l 按已知规律 $l=l(t)$ 变化，用直角坐标和极坐标两种方法写出运动微分方程（图10.7）。

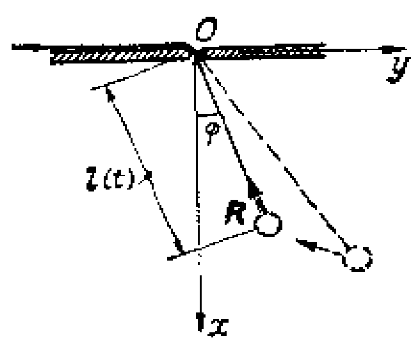


图10.7 变长度单摆

解 取直角坐标系 Oxy 如图。约束方程为

$$f(x,y,t)\equiv x^2+y^2-l^2(t)=0. \qquad (1)$$

求偏导数得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y.$$

动能为

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2),$$

势能为$V=-mgx$。由此求得广义力为

$$Q_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=mg, \qquad Q_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=0.$$

代入式(10.24)得

$$\begin{cases} m\ddot{x}=mg+2\lambda x, & (2)\\ m\ddot{y}=2\lambda y. & (3)\end{cases}$$

由式(1),(2),(3)可解出运动规律$x(t)$和 $y(t)$，以及未知函数λ，再根据

$$R=\lambda\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}$$

可以求出约束力R（即绳子的张力）。

取极坐标(ρ,φ)，则约束方程① 为

$$f(\rho,\varphi,t)\equiv\rho-l(t)=0. \qquad (4)$$

动能为

$$T=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2),$$

势能为$V=-mg\rho\cos\varphi$。由此求得广义力为

$$Q_\rho=mg\cos\varphi, \qquad Q_\varphi=-mg\rho\sin\varphi.$$

代入式(10.24)得

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)=mg\cos\varphi+\lambda, & (5)\\ m\dfrac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})=-mg\rho\sin\varphi. & (6)\end{cases}$$

---

① (4)中f和(1)中的f不是同一个量，因而相应λ的意义也不同。

将式(4)代入(6)得运动微分方程为

$$\frac{d}{dt}[l^2(t)\dot{\varphi}]+gl(t)\sin\varphi=0.$$

由此可以解出运动规律$\varphi(t)$. ▌

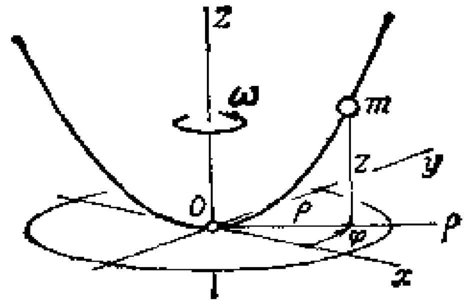


图10.8 串在转动铁丝上的小球

例10.5 质量为m的小球串在光滑的铁丝上。铁丝的形状是一抛物线，在$O\rho z$平面(图10.8)中的方程是$\rho^2=2az$。铁丝以匀角速ω绕竖直轴Oz转动，列出在重力作用下质点的运动微分方程。

解 取柱坐标(ρ,φ,z)，动能是

$$T=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2),$$

势能是$V=mgz$，广义力为

$$Q_\rho=0,\quad Q_\varphi=0,\quad Q_z=-mg.$$

约束方程是

$$\begin{cases}f_1(\rho,\varphi,z)\equiv\rho^2-2az=0, & (1)\\ f_2(\rho,\varphi,z,t)\equiv\varphi-\omega t=0. & (2)\end{cases}$$

求得

$$\frac{\partial f_1}{\partial\rho}=2\rho,\quad \frac{\partial f_1}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial f_1}{\partial z}=-2a,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial\rho}=0,\quad \frac{\partial f_2}{\partial\varphi}=1,\quad \frac{\partial f_2}{\partial z}=0.$$

代入式(10.26)得

$$\begin{cases}m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)=\lambda_1(2\rho), & (3)\\ m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})=\lambda_2 & (4)\\ m\ddot{z}=-mg+\lambda_1(-2a). & (5)\end{cases}$$

由式(3)和(5)消去λ_1，并将(1)中的$z=\rho^2/2a$和(2)中的$\dot{\varphi}=\omega$代入，得到ρ的微分方程为

$$(a^2+\rho^2)\ddot{\rho}+\rho\dot{\rho}^2+a\rho(g-a\omega^2)=0.$$

由此可解出ρ与t的关系，然后代回(1)求出$z(t)$，而$\varphi(t)$由约束条件(2)决定，不必再求。

如果要求出约束力的大小，那么再代入式(3)或(5)求λ_1，代入式(4)求λ_2，最后再去求约束力R。 ▎

*** 用直角坐标(x, y, z)列出上例中运动微分方程。***

例10.6 用抛物线坐标(ξ,η,φ)讨论例10.5，其中第三个坐标φ与柱坐标中的φ一致，而ξ,η与ρ,z的关系为

$$\rho=a\xi\eta,\quad z=\frac{a}{2}(\xi^2-\eta^2+1),$$

其中a是常数。

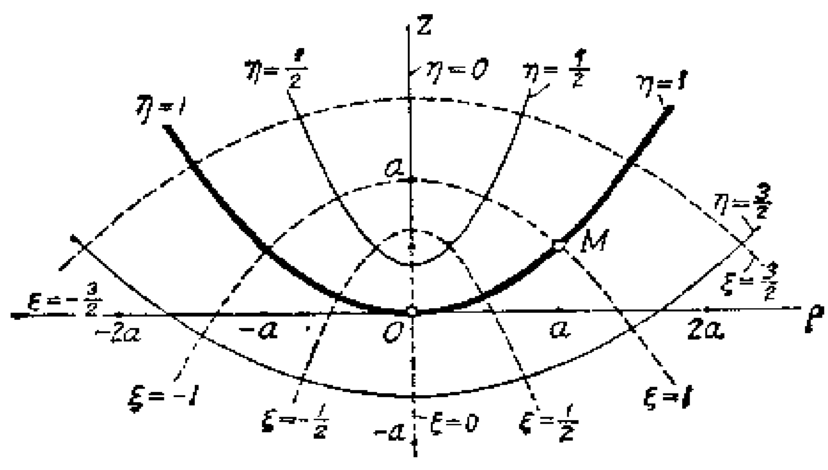


图10.9 抛物线坐标系的坐标曲线

解 在φ=常量的平面内，坐标曲线ξ=常量和η=常量，如图10.9所示。坐标曲面由这个图绕Oz轴旋转而成，这个曲线坐标系是正交的。

动能表达式为

$$T=\frac{m}{2}\left(\rho^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)$$

$$=\frac{ma^2}{2}\left[(\xi^2+\eta^2)\left(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2\right)+\xi^2\eta^2\dot{\varphi}^2\right].$$

势能表达式为

$$V=mgz=\frac{mga}{2}(\xi^2-\eta^2+1).$$

由此求得广义力为

$$Q_\xi=-\frac{\partial V}{\partial \xi}=-mga\xi,$$

$$Q_\eta=-\frac{\partial V}{\partial \eta}=mga\eta,$$

$$Q_\varphi=-\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0.$$

我们看到，当 $\eta=1$ 时对应的坐标曲线方程就是 $\rho^2=2az$。所以在这种曲线坐标系中，约束方程特别简单，它们是

$$f_1(\xi,\eta,\varphi)\equiv\eta-1=0, \tag{1}$$

$$f_2(\xi,\eta,\varphi)\equiv\varphi-\omega t=0. \tag{2}$$

因而有

$$\frac{\partial f_1}{\partial \xi}=0,\quad \frac{\partial f_1}{\partial \eta}=1,\quad \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}=0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \xi}=0,\quad \frac{\partial f_2}{\partial \eta}=0,\quad \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}=1.$$

代入式(10.26)得

$$ma^2\frac{d}{dt}\left[(\xi^2+\eta^2)\dot{\xi}\right]-ma^2\xi\left(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\eta^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$$=-mga\xi, \tag{3}$$

$$ma^2\frac{d}{dt}\left[(\xi^2+\eta^2)\dot{\eta}\right]-ma^2\eta\left(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\xi^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$$=mga\eta+\lambda_1, \tag{4}$$

$$ma^2\frac{d}{dt}(\xi^2\eta^2\dot{\varphi})=\lambda_2. \tag{5}$$

这里有五个方程，即(1)—(5)，对应五个未知函数，即ξ,η,φ和λ_1,λ_2。如果对约束力不感兴趣，就只要考虑方程(1)，(2)和(3)。以式(1)，(2)代入式(3)简化后得

$$(\xi^2+1)\ddot{\xi}+\xi\dot{\xi}^2+(g/a-\omega^2)\xi=0,$$

从中解出$\xi(t)$，再由约束方程(1)和(2)解出

$$\eta(t)=1, \quad \varphi(t)=\omega t.$$

这样运动规律就可以完全确定。▌

＊＊＊ 用非正交曲线坐标系(ρ,φ,η)解上例，直接导出例10.5中ρ的方程。＊＊＊

以上几个例子说明，在有约束时，坐标系的选取大有讲究。坐标系选得好，可以使某一个或某两个方程中不出现约束力。这对于解题是十分有利的，特别是在不需要求约束力的问题中更为适用。

按什么原则来选取坐标系才能达到这一目标呢？我们把描述质点运动的独立变量叫做**广义坐标**，因此自由质点的任意一组三维曲线坐标都可以作为它的广义坐标，而具有一个约束条件$f=0$的质点有两个广义坐标。我们可以选取这样的曲线坐标，使约束曲面$f=0$刚好就是一个坐标曲面。为了确定起见设它就是与q_3对应的那个坐标曲面，即可写成

$f\equiv q_3-$常量$=0$ 或 $f\equiv q_3-$(时间的已知函数)$=0$，

则必定有

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2}=0.$$

于是由式(10.24)可以得出两个不包含λ的方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \quad (j=1,2), \tag{10.27}$$

其中 q_1, q_2 就是质点的广义坐标。

这一结果从几何上看是明显的，根据 2-4 中关于曲线坐标的讨论，$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 在曲面 $f=0$ 的切平面内。我们讨论的是光滑约束的情况，约束力 $\boldsymbol{R}$ 沿曲面 $f=0$ 的法向，因此必有

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}_1=0,\qquad \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}_2=0。$$

方程(10.27)是受约束质点的不包含约束力的运动微分方程，为了与式(10.24)区别起见它被称为**第二类拉格朗日方程**①。从以上讨论可知，第一类和第二类拉格朗日方程之间并无不可逾越的鸿沟，后者乃是前者在某种特殊情况下的表现而已。方程组(10.27)和自由质点的方程(10.8)具有完全一致的形式，所不同的是方程组(10.27)中只有两个方程，与两个广义坐标所对应。

同理，如果存在两个约束条件 $f_1=0$ 和 $f_2=0$，此时质点的广义坐标只有一个，设为 q_1。当我们将两个约束曲面分别选作与 q_2 和 q_3 对应的坐标曲面时，必定有

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1}=0,\quad \frac{\partial f_2}{\partial q_1}=0。$$

因此由式(10.24)就可以得出一个不包含 λ_1 和 λ_2 的运动微分方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1。$$

这就是在有两个约束条件时质点的第二类拉格朗日方程。

总之，在质点作自由运动时，有三个广义坐标，因为不存在约束力的问题，所以三个运动微分方程都是第二类方程。如果质点约束在一个曲面上，三个量 q_1, q_2 和 q_3 被一个约束方程所联系，

① 我们通常所说的拉格朗日方程是指第二类方程，第一类方程只在需要求约束力时才用到。

此时只有两个量是独立的。如果坐标系选得合适，运动微分方程中有两个是第二类方程，一个是包含未知约束力的第一类方程。如果不需要求出约束力，那么就可以从前面的两个方程中求出质点的运动。同理，在有两个约束条件时，三个量 q_1, q_2 和 q_3 中只有一个是独立的，如果坐标系选得合适，第二类方程只有一个。因此，在不需要求出约束力时自由质点的运动以及受约束质点的运动可以分别由三个、两个或一个运动微分方程来描述，它们的形式是完全一样的。所以，对于质点来说，无论是自由的还是受约束的，无论是取哪一种广义坐标，其拉格朗日方程都取统一的形式。在10-4中将会看到，这种形式也完全适用于一般的质点系，特别是对于非自由系，尽管质点数目很多，但是独立的广义坐标的数目并不一定多，所以方程的个数也不一定多。

10-2 虚位移原理

对于质点系也可以象质点那样从牛顿定律出发推导拉格朗日方程，这虽无原则困难，但计算比较繁。下面我们引进两个新的力学原理，即虚位移原理和达朗伯原理，并以此出发导出质点系的拉格朗日方程。

所谓原理是指带有根本性的一些规律。它们的正确性是在长期实践中所证实的（直接的或者间接的）。其他定理可以以它们为基础经严格的逻辑推理推导出来。在此以前，我们把牛顿定律作为原理，而把能量守恒、动量守恒、动量矩守恒等定理作为它的推论，尽管从物理学的观点看来，后者的成立并不一定要以牛顿定律的成立为根据。虚位移原理和达朗伯原理是关于受约束系统的力学原理，可以把它们看作是独立于牛顿定律之外的力学理论的另一个出发点。当然，在理论力学范畴中，不同的力学原理不应当互相矛盾，下面将看到虚位移原理和达朗伯原理的联合与牛顿定律是等价的。这样，也就间接地说明了质点系拉格朗日方程可以从牛顿定律推导出来。

虚位移原理（或称虚功原理）是关于受约束质点系平衡的原理。在1-3中曾经提到过，《墨经》中就已知道杠杆两端的"权"是不一样的。如果图10.10中 $l_1>l_2$，而 $F_1=F_2$，则杆的 m_1 端将向下运动。在欧洲，从杠杆的研究归纳出力学中的"黄金规律"——"得之于力，失之于速度"①，其意思是说，在平衡位置附近缓慢运动时（当作平衡情况来看），如果 $F_2>F_1$，应有 $l_1>l_2$，即 $v_2<v_1$。现在把这种思想更精确地用数学式子表达出来。

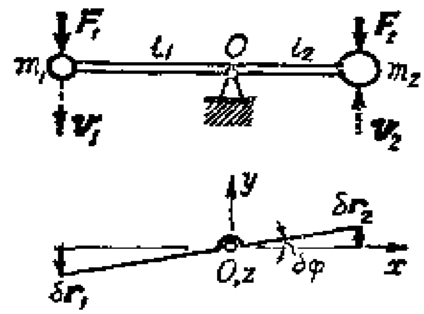


图10.10 杠杆的平衡

杠杆的平衡条件是

$$F_1 l_1 - F_2 l_2 = 0.$$

如果给杠杆一个微小的转角 $\delta\varphi$，m_1 和 m_2 的位移分别是 $\delta \boldsymbol{r}_1$ 和 $\delta \boldsymbol{r}_2$，那么上式可以改写成

$$\boldsymbol{F}_1 \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = 0,$$

或者

$$\sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0.$$

这就是以虚位移原理的形式表示出来的杠杆平衡条件。

为了叙述与论证一般质点系的虚位移原理，必须首先说明几个基本概念。

（一）自由度

设质点系有 n 个质点，其位置向量分别为 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$，为了书写方便起见，把它们的曲线坐标（当然包括直角坐标在内）记成：

① 由伽利略提出，他补充了斯蒂文（Stevin, S., 1548—1602）关于虚位移原理最早的研究成果，但象现在这种形式的虚位移原理则是十八世纪以后由伊凡·伯努利、拉格朗日等人研究以后才形成的。

$$(x_1,x_2,x_3),(x_4,x_5,x_6),\cdots,(x_{3n-2},x_{3n-1},x_{3n})$$ ①。

如果质点系中各质点是完全自由的，则这$3n$个坐标是独立的，它们完全决定了质点系的位形(位置和形状)，那么我们就说质点系有$3n$个自由度。如果各质点之间受有k个独立的位置约束，即存在k个约束方程$f_j(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n;t)=0\quad(j=1,2,\cdots,k)$，或写成

$$f_j(x_1,x_2,\cdots,x_{3n};t)=0\quad(j=1,2,\cdots,k),\qquad(10.28)$$

则描述质点系的$3n$个变量中只有$3n-k$个是独立的。描述质点系位形的独立变量的数目$s=3n-k$称为**系统的自由度**②。我们可以适当选取s个独立的参数$q_1,q_2,\cdots,q_s$，叫做**系统的广义坐标**，把质点系中各质点的向径表示成广义坐标$q_1,q_2,\cdots,q_s$与时间t的函数

$$\boldsymbol{r}_j=\boldsymbol{r}_j(q_1,q_2,\cdots,q_s;t)\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

或写成

$$x_j=x_j(q_1,q_2,\cdots,q_s;t)\quad(j=1,2,\cdots,3n),\qquad(10.29)$$

这s个广义坐标可以取曲线坐标$x_1,x_2,\cdots,x_{3n}$中的某s个，也可以取另外s个合适的参数，只要它们是相互独立的，而且能按上述要求描述质点系的位形。

例10.7 在图10.10中，当不计杠杆的质量时，系统可当作只有两个质点m_1和m_2的质点系来处理，即$n=2$。设两质点的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2)，z坐标垂直于纸平面，坐标原点取在支点O，则约束方程共有五个，它们是

$$z_1=0,\qquad z_2=0,$$
$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(l_1+l_2)^2,$$
$$l_1x_2+l_2x_1=0,\qquad l_1y_2+l_2y_1=0。$$

约束都是定常的。此系统的自由度数是$3\times2-5=1$，所以只要取一个广义坐标，比如可取它为杠杆与水平线（x轴）的夹角φ，

---

① 我们在这里用符号x_i是为了避免与广义坐标q_i相混淆。

② 对有非完整约束的系统来说，此定义有所修正，见10-8。

所有六个坐标都可以表成 φ 的函数如下：

$$x_1=l_1\cos\varphi,\quad y_1=l_1\sin\varphi,\quad z_1=0,$$
$$x_2=-l_2\cos\varphi,\quad y_2=-l_2\sin\varphi,\quad z_2=0. \quad \blacksquare$$

例10.8 一只机械手 $ABCDEF$ 由四个刚体组成（图10.11），A 是球形铰链，B,C,D 是三个平面铰链。求这个系统的自由度数。

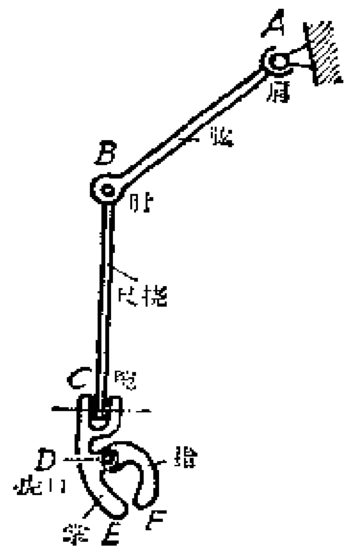


图10.11 机械手有几个自由度？

解 每一个刚体有六个自由度。每一个球形铰链使自由度数减少 3 个，每一个平面铰链使自由度数减少 5 个，所以整个系统的自由度数是

$$(4\times6)-3-(3\times5)=6.$$

机械手的位形由 6 个广义坐标决定。比如这 6 个广义坐标可以这样来取，刚体 AB（肱）相对固定空间的 3 个欧拉角，BC（尺挠）相对 AB 的一个转角，CE（掌）相对 BC 的一个转角，还有 DF（指）相对 CE 的一个转角。$\blacksquare$

例10.9 平面上的刚性杆件系统。限制在平面上的一根杆

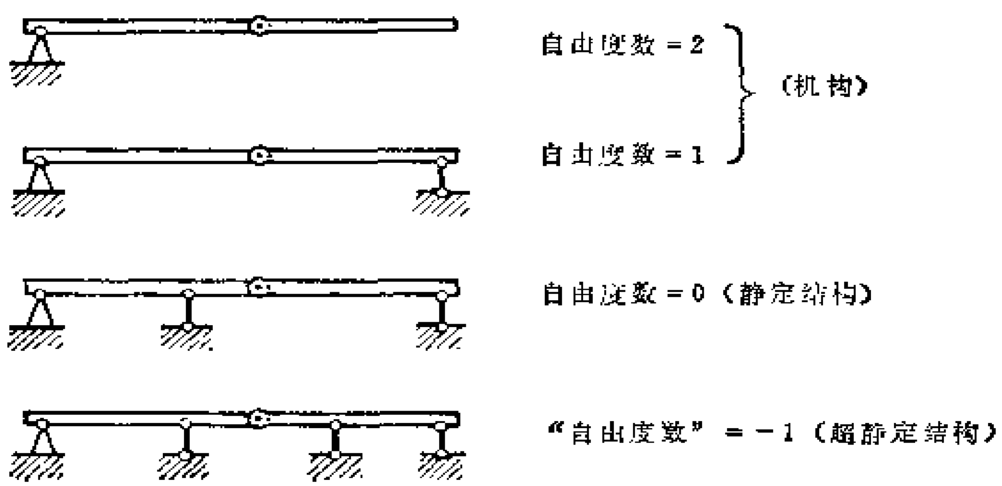


图10.12 杆系的自由度

有三个自由度，每一个铰链约束减少2个自由度，一个连杆约束减少一个自由度。因此由两根杆组成的系统的自由度数可以有各种情况，如图10.12所示。▌

（二）实位移、可能位移和虚位移

受约束的质点系在运动过程中，各质点的向径 $\boldsymbol{r}_i$（$i=1,2,\cdots,n$）一方面要满足动力学微分方程和初始条件；另一方面还必须满足约束方程(10.28)。凡是同时满足这两个要求的运动就是实际上发生的运动，称为真实运动。在时间 t 到 $t+dt$ 这无穷小间隔内，真实运动产生的位移称为质点系的**实位移**，记作 $d\boldsymbol{r}_i$（$i=1,2,\cdots,n$）或写成曲线坐标形式 dx_i（$i=1,2,\cdots,3n$）。因为 t 时刻的 x_i 和 $t+dt$ 时刻的 x_i+dx_i（$i=1,2,\cdots,3n$）都应满足约束方程(10.28)，即

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_{3n};t)=0,$$
$$f_i(x_1+dx_1,x_2+dx_2,\cdots,x_{3n}+dx_{3n};t+dt)=0。$$

将后一式按级数展开略去高阶小量，并考虑到前一式，最后得出实位移满足的方程为

$$\sum_{j=1}^{3n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx_j+\frac{\partial f_i}{\partial t}dt=0 \quad (i=1,2,\cdots,k), \qquad (10.30)$$

它也可以由约束方程(10.28)直接求微分而得到。对于定常约束情况，f_i 不显含时间 t，它成为

$$\sum_{j=1}^{3n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx_j=0 \quad (i=1,2,\cdots,k)。 \qquad (10.31)$$

凡是满足约束条件(10.28)的无穷小位移称为**约束允许的位移**，简称**可能位移**。显然实位移是满足约束条件的，所以也是可能位移。但是反过来说就不对，任意一个可能位移并不一定是某个真实运动所产生的实位移，因为我们在定义可能位移时，只以它是否满足约束条件为分界线，并没有考虑它是否满足动力学方程和

初始条件。由定义出发立刻可以推出可能位移也应该满足方程(10.30)或(10.31)。总之，我们可以这样说，所有满足方程(10.30)或(10.31)的位移都是可能位移，而其中只有一组 $dx_1, \cdots, dx_{3n}$ 是实位移。例如有一个质点$M(n=1$的情形)被约束在一个固定球面上运动（图10.13），其约束方程为

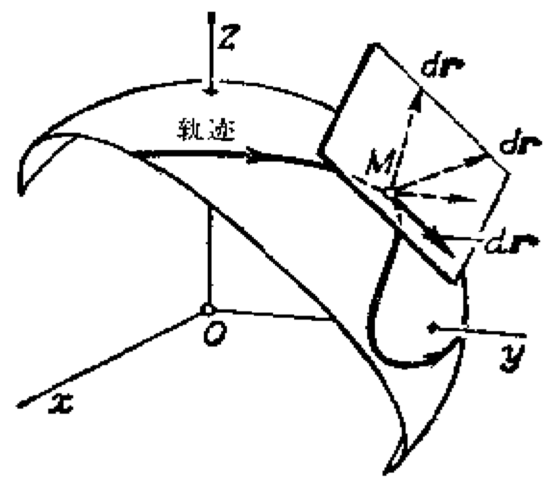


图10.13　实位移是可能位移中的一个

$$x^2+y^2+z^2=l^2,$$

于是方程(10.31)成为

$$xdx+ydy+zdz=0.$$

满足此方程的$d\boldsymbol{r}$或(dx,dy,dz)有无数多个，它们就是球面上M点(x,y,z)处切平面上的任意向量$d\boldsymbol{r}$（图10.13中画出了四个），这些都是可能位移。质点的真实运动是沿球面上某一条轨迹进行的，它必须由动力学方程和初条件才能确定，与这条轨迹相切的那个位移（图中实线所示）才是实位移，显然它只是所有可能位移 $d\boldsymbol{r}$ 中的一个而已。

任意两个可能位移之差定义为**虚位移**，记作$\delta \boldsymbol{r}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 或δx_i $(i=1,2,\cdots,3n)$，即

$$\delta \boldsymbol{r}_i=d\boldsymbol{r}_i'-d\boldsymbol{r}_i'' \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$\delta x_i=dx_i'-dx_i'' \quad (i=1,2,\cdots,3n).$$

其中带“$'$”或“$''$”的符号代表两个可能位移。

下面分别就定常约束与非定常约束两种情况考虑虚位移的性质。

在定常约束情况下，可能位移满足方程(10.31)，因此有

$$\sum_{j=1}^{3n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx'_j=0,\qquad \sum_{j=1}^{3n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx''_j=0.$$

两式相减，并根据虚位移的定义得

$$\sum_{j=1}^{3n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\delta x_j=0\quad (i=1,2,\cdots,k).\tag{10.32}$$

对比式(10.32)和(10.31)，我们可以得出**结论**：在定常约束情况下，虚位移就是可能位移。前面说过，实位移是可能位移之一，因而，在定常约束情况下实位移是无数虚位移之中的一个。

在非定常约束情况下，可能位移应满足方程(10.30)，因此有

$$\sum_{j=1}^{3n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx'_j+\frac{\partial f_i}{\partial t}dt=0,$$

$$\sum_{j=1}^{3n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx''_j+\frac{\partial f_i}{\partial t}dt=0.$$

两式相减，并根据虚位移的定义也得出式(10.32)，即

$$\sum_{j=1}^{3n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\delta x_j=0\quad (i=1,2,\cdots,k).$$

对比式(10.32)和(10.30)，发现 dx_j 和 δx_j 满足的方程不相同，因此在非定常约束情况下，虚位移不一定是可能位移。并可进一步推论说，在非定常约束情况下，实位移不一定是无数虚位移中的一个。

例如有一质点（$n=1$的质点系）约束在一个以等速率 u 上升的水平面上运动（图10.14），这是一个非定常约束，约束方程为

$$z-ut=0,$$

即要求质点的 z 坐标变化率与约束平面上升的速率相同，也就是说质点必须时时在约束平面上。图10.14中画出三个由 t 至 $t+dt$ 的可能位移，其中一个是实位移。根据式(10.32)，虚位移应该满足方程

$$\delta z=0,$$

这表示要求虚位移的 z 坐标增量为零，因此虚位移 $\delta \boldsymbol{r}$ 必须保持在与 t 对应的那个平面内。图10.14中画出两个虚位移，它们都在与时刻 t 对应的同一个约束平面内。从图中可清楚地看出可能位移有无数多个，虚位移也有无数多个，但它们是两类完全不相同的位移。另外，这里的实位移不是虚位移中的一个。

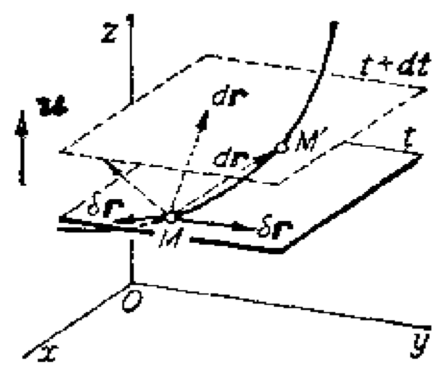


图10.14　非定常约束情况下虚位移不是可能位移的例子

虚位移是一个抽象的等时变分的概念，它的直观意义可以解释如下：在非定常约束情况下，约束是随时间变动的。我们考虑某一时刻（可以是任意时刻）把约束加以“冻结”，然后再来看约束所允许的位移，这样，虚位移就是约束被冻结后的可能位移。因为在时刻 t 约束被“冻结”，所以非定常约束方程(10.28)中的 t 值应该保持不变，然后再考虑在此前提下的无穷小位移。将式(10.28)作“等时变分”运算（同微分运算，但 $\delta t=0$）可得到方程(10.33)，这与前面由虚位移定义出发所得的推论相一致。至于定常约束情况，约束本来就不随时间变动，“冻结”与“不冻结”一样，用等时变分和微分两种运算就没有差别了。

如果系统的广义坐标为 $(q_1, q_2, \cdots, q_s)$，根据式(10.29)得可能位移的表达式为

$$dx_j=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial x_j}{\partial t}dt \quad (j=1,2,\cdots,3n),$$

或

$$dr_j = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial r_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial r_j}{\partial t} dt \quad (j=1,2,\cdots,n)。 \qquad (10.33)$$

根据定义虚位移是

$$\delta r_j = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \delta q_i \quad (j=1,2,\cdots,n), \qquad (10.34)$$

其中 δq_i 是以广义坐标表示的虚位移。今后我们把δr_j, δx_j 或 δq^i 都叫做虚位移，一般不加区别，只是要注意到各个 δq_i 彼此是独立的，而前两者则不是。

（三）理想约束

在5-1中我们把作用在质点系中质点上的力分成内力和外力，这是使用三个基本定理时对力的一种划分方法。在研究非自由质点系时，有必要将作用在质点系上的力（包括内力和外力）分为约束力和主动力两大类。由约束物体作用在质点系上的力叫做约束力，其他的力都叫做主动力。

力在虚位移上作的功叫做虚功，而力在实位移上的功叫做实功。如果质点系所受的约束力在任何虚位移上作功的总和等于零，则此种约束称为理想约束，即可以写成

$$\sum_i \boldsymbol{N}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0,$$

其中 $\boldsymbol{N}_i$ 是作用在第 i 个质点上的约束力。

在7-1中曾例举过约束力作功为零的例子，在那里所计算的是约束力的虚功，所以那些约束都是理想约束。在图10.14中，如果运动平面是光滑的，则作用在质点上的约束力（图中未画出）始终与平面垂直，而虚位移总是在平面内的，所以约束力的虚功为零，光滑平面约束是理想约束（读者不难论证光滑曲面约束是理想约束）。在图10.14中，由于实位移不一定与约束力垂直，

所以在光滑平面（或曲面）约束中，约束力的实功不一定为零。图10.15所示是一个变长度的单摆，对质点来说它是一个非定常约束，约束力$\boldsymbol{N}$沿绳子方向。由于虚位移$\delta\boldsymbol{r}$始终与绳子垂直，所以约束力的虚功为零，这种约束是理想约束。但是质点的实位移$d\boldsymbol{r}$不一定与绳子垂直，所以约束力的实功不一定为零。总之，光滑曲面约束（定常的或非定常的）、不可伸长的绳子约束（包括传动机构中的皮带）、光滑铰链约束、理想连杆约束，刚性约束（刚体可看成由无数理想连杆联结而成的质点系）以及作纯滚动的刚体所在的曲面等等都是理想约束的例子。理想约束是许多实际情况的理论模型，在以后的讨论中，如果我们对于约束没有特殊的说明，则往往是指理想约束①。

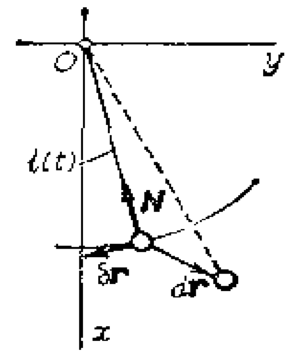


图10.15 非定常约束的约束力作功吗？

虚位移原理或称**虚功原理**是分析力学中一个重要的原理，其内容是：**具有定常②、理想约束的质点系，其平衡的充要条件是，在任何虚位移上所有主动力的虚功之和等于零。**写成表达式是

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0,} \tag{10.35}$$

其中$\boldsymbol{F}_i$表示作用在质点i上的主动力。前面说过虚位移原理可以作为一个力学基本原理加以承认（和承认牛顿定律一样），条件是不与牛顿定律相矛盾。反之，如承认牛顿定律是力学基本原理，那么应该可以把虚位移原理作为由前者推导出来的一个定理

① 关于非理想约束的处理方法，可参阅有关分析力学的专著。

② 一般说来，这个条件是太强了，只需$d\boldsymbol{r}_i$是$\delta\boldsymbol{r}_i$之一就可以。在非定常约束情况下，虚位移原理也可能局部地成立，只要式(10.33)中的$\partial\boldsymbol{r}_i/\partial t=0$在某些位置上被满足。

看待，下面对此进行论证。在证明以前，我们对虚位移原理中“平衡”一词略加说明。在静力学中，我们把等效于零的力系叫做平衡力系，在平衡力系作用下的刚体就认为是平衡的。现在的“平衡”是指，如果质点系原来是静止的（相对于惯性参考系），在主动力系作用下它仍然保持静止。这样的规定比原先在刚体静力学中关于平衡的规定条件要苛刻一些①。

先证明原理中条件(10.35)的必要性。由于系统保持静止，根据牛顿定律，作用在每一个质点 i 上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和约束力 $\boldsymbol{N}_i$ 之和应等于零，即

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i=0。$$

将等式左右点乘 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 并对 i 求和得

$$\sum_i(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0,$$

展开得

$$\sum_i\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\sum\boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0。$$

由于理想约束条件 $\sum\boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$，所以推得式(10.35)成立。

再证明条件的充分性。采用反证法。设式(10.35)对任何虚位移都成立，同时又假定在主动力系作用下，质点系原来静止的状态被破坏了，有些点（至少有一个点）的 $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i$ 不等于零，于是它的加速度是

$$\boldsymbol{a}_i=\frac{\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i}{m_i}。$$

由于运动是从静止开始的，故它的位移 $d\boldsymbol{r}_i$ 与 $\boldsymbol{a}_i$ 同向，所以在这些点上

$$(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i)\cdot d\boldsymbol{r}_i>0。$$

---

① “原来静止”这个提法是不可少的。例如图5.17所示的由两个质点和绳子所组成的质点系放在光滑水平面上运动，因平面内没有主动力，所以主动力的虚功为零。但是两个质点都沿旋轮线运动，并不静止。通常这一类问题不能用这里的虚位移原理来处理。

对 i 求和，且考虑到理想约束条件，推出

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i > 0.$$

因为$d\boldsymbol{r}_i$ 是 $\delta\boldsymbol{r}_i$之一，于是与推论前的假设式(10.35)矛盾，这说明满足方程(10.35)时每个质点都必须保持静止。

设非自由质点系的广义坐标为$(q_1, q_2, \cdots, q_s)$，则虚位移原理的表达式具有非常简单的形式。根据式(10.34)，主动力的虚功可以写成

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j\right) \cdot \boldsymbol{F}_i$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) \delta q_j.$$

令
$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \quad (j=1,2,\cdots,s),$$

它们是质点系所受的**广义力**。将上式代入式(10.35)，于是虚位移原理的表达式就成为

$$\boxed{\sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = 0.} \tag{10.36}$$

因为广义坐标是独立的参数，它们的变更 δq_j 是彼此独立的；又因原理中所说的虚位移是任意的，所以我们可以取一组特殊的虚位移，即取 $\delta q_1 \neq 0$，而其余的 $\delta q_2, \cdots, \delta q_s$ 都为零。则由式(10.36)可得出 $Q_1 = 0$。同理，我们取类似的特别的虚位移，由式(10.36)可以依次得出 $Q_2 = 0, Q_3 = 0, \cdots, Q_s = 0$。于是虚位移原理的表达式(10.36)等价于

$$Q_j = 0 \quad (j=1,2,\cdots,s).$$

所以虚位移原理也可以叙述为：**具有定常理想约束的质点系，其平衡的必要且充分条件是所有的广义力等于零。**在解决实际问题时应用这一结果，有时比较方便。

在10-1中已说过，质点的广义力可以用两种办法来求，除了直接按定义计算外；另一种办法是考虑广义力所作的功。在一般的质点系中也是这样。为了求 Q_j，可以考虑广义坐标 q_j 作一单位变更 $\delta q_j=1$，同时其余的广义坐标不变，于是在这种情况下所有主动力所作的元功的值就等于广义力 Q_j 的值。

对于有势函数 $V(q_1,q_2,\cdots,q_s)$ 的主动力，因元功的表达式为

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^{s}Q_j\delta q_j=\sum_{j=1}^{s}\left(-\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)\delta q_j.$$

所以广义力可以由势能函数的负偏导数求得，即

$$\boxed{Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}\quad(j=1,2,\cdots,s).}$$

因此对于主动力有势的情形，质点系平衡的必要且充分条件 $Q_j=0$ 等价于

$$\frac{\partial V}{\partial q_j}=0\quad(j=1,2,\cdots,s),$$

这说明质点系在平衡位形处势能取驻定值。进一步可证明，如果势能在平衡位形处取极小值，则这个平衡位形是稳定的。

虚位移原理给出受约束质点系的平衡条件，在第一章静力学中也曾给出过平衡条件。我们注意到有两点不同：一是对象不同。静力学中的平衡条件是对刚体而言的（质点作为其特例），而现在则是对质点系，当然刚体也是一种特殊的受约束质点系，因此虚位移原理也适用于刚体，但是静力学中的平衡条件却不能直接用于一般的质点系。二是基本思想不同。静力学中的平衡条件基于这样的思想，如果刚体处于平衡，找一找作用于其上的力应该满足什么条件。虚位移原理的基本思想与此有区别，它是：在质点系所有的位形中有无数个是不平衡的，只有特定的一个（或几个）是平衡的，我们对每一个位形（也包括平衡位形）作“虚位移试探”，看看平衡位形与不平衡位形相比在虚功方面有

什么特点，由此找到了虚位移原理的必要且充分条件。这可以说是一种“在动中求静”的方法。在数学上这是一种变分问题的思想，在10-10中将对变分法作进一步的讨论。

例10.10 惰钳（Lazy-tongs）机构。惰钳由六根长杆和两根短杆组成，长杆长$2a$，短杆长a，杆与杆之间用铰链相连如图10.16所示。它在顶部受力$\boldsymbol{P}$的作用，问下部力$\boldsymbol{Q}$的大小应为多少才能使系统处于平衡状态？图中θ为已知角。

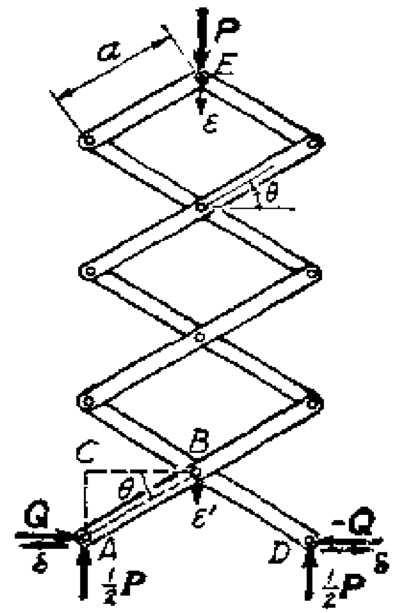


图10.16 惰钳

解 虽然这个机构有好几个自由度，但是为了求出Q与P的关系，只要选取一组特殊的虚位移就可以了。我们设想力$\boldsymbol{P}$的作用点E向下运动，两个$\boldsymbol{Q}$的作用点A和D沿水平线反向运动。设

$$|\delta r_E|=\varepsilon,\quad |\delta r_A|=|\delta r_D|=\delta.$$

则根据虚位移原理可得关系式

$$P\varepsilon-2Q\delta=0,$$

解得

$$Q=\frac{P\varepsilon}{2\delta}.$$

余下的问题是求出ε与δ之间的关系。考虑半根杆AB，B点的虚位移ε'与δ的关系可利用瞬时转动中心C点求得

$$\frac{\delta}{\varepsilon'}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}=\operatorname{ctg}\theta.$$

由几何关系很容易看出E点的位移ε是B点位移ε'的7倍，即$\varepsilon=7\varepsilon'$，代入前两式可得

$$Q=\frac{7}{2}P\operatorname{tg}\theta.$$

此题用静力学平衡条件也可求解，读者不妨试一试，从而体会虚位移原理的优点。▌

＊＊＊ 在上题中，相应于广义坐标 θ 的广义力 Q_θ 是什么？＊＊＊

例10.11 三铰拱 ABC 受集中载荷 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的作用（图10.17），各部分尺寸如图所示。求铰链 B 处反力的水平投影 X（向右为正）。

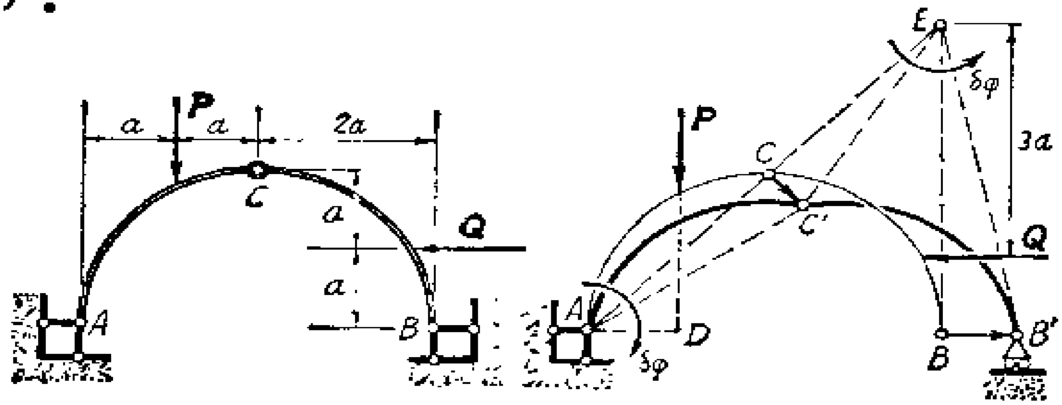


图10.17 三铰拱的平衡

解 三铰拱是一个静定结构，自由度为零，并没有什么虚位移可言。但为了求 X，可以把 B 处水平连杆约束解除掉，把 X 当作主动力看待，这样系统就有了一个自由度。

设在虚位移时 AC 转过的角度为 $\delta\varphi$，CB 绕 E 点作瞬时转动，由于 $EC=AC$，所以 CB 的转角也是 $\delta\varphi$，但转向相反。计算力 $\boldsymbol{P}$ 的虚功时，可以把它的作用点沿作用线传递到刚体 AC 的延拓部分的 D 点，而 D 点的虚位移与 $\boldsymbol{P}$ 的方向相同，大小是 $a\delta\varphi$，由虚位移原理得

$$P(a\delta\varphi)-Q(3a\delta\varphi)+X(4a\delta\varphi)=0,$$

由此解得

$$X=(3Q-P)/4. \quad ▌$$

例10.12 两根长 $2l$ 重 P 的均质杆 AD 和 BD 用铰链 D 互相连结，并靠在一个半径为 a，其轴为水平（垂直于纸面）的固定光滑圆柱O上（图10.18）。求由两杆组成的系统的平衡位形。

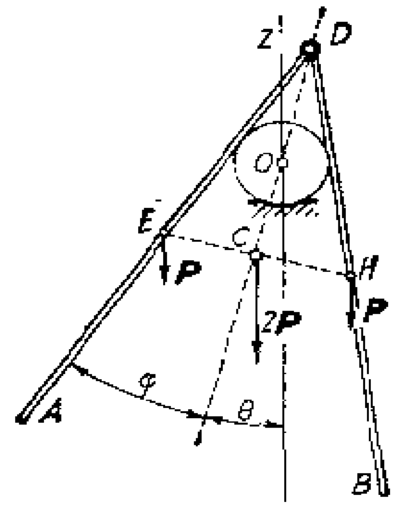


图10.18 求平衡位形

解 作用在系统上的主动力只有重力，重力的势能可以通过系统质心 C 的高度表出。这个系统有两个自由度，取 OD 的偏角 θ，AD 与 BD 夹角的一半 φ 为广义坐标。于是有

$$\overline{OC}=\overline{CD}-\overline{OD}=l\cos\varphi-\frac{a}{\sin\varphi},$$

势能为

$$V=-2P\cdot\overline{OC}\cdot\cos\theta=2P\left(-l\cos\varphi+\frac{a}{\sin\varphi}\right)\cos\theta.$$

平衡条件是广义力等于零，亦即

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0,\quad\frac{\partial V}{\partial\theta}=0.$$

由此可以得出

$$\left(l\sin\varphi-a\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right)\cos\theta=0, \qquad (1)$$

$$\left(l\cos\varphi-\frac{a}{\sin\varphi}\right)\sin\theta=0. \qquad (2)$$

由(1)和(2)解出在平衡情况下有 $\theta=0,\pi/2,\pi,3\pi/2,$。从物理上看，只有 $\theta=0$ 是合理而可取的。代入(1)解得 $\varphi=\varphi_0$，φ_0 是三角方程

$$l\sin\varphi-\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}=0$$

的根。如果$V(0,\varphi_0)$是势能的极小值，那么平衡位形$\theta=0,\varphi=\varphi_0$是稳定的。从二元函数的理论知道，这要求满足条件

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right|_{0,\varphi_0}>0,$$

$$\Delta=-\left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial\theta}\right|_{0,\varphi_0}\right)^2+\left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right|_{0,\varphi_0}\right)\left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right|_{0,\varphi_0}\right)>0.$$

第一个条件相当于$\overline{OC}>0$，即要求质心C在圆柱轴线O之下。从物理上看，如果将φ保持φ_0值不变，系统相当于一个摆长为$\overline{OC}$的单摆，$\overline{OC}<0$将是一个倒立的摆，对应不稳定情况。由于有

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial\theta}\right|_{0,\varphi_0}=0,$$

第二个条件（当$\overline{OC}>0$时）等效于

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right|_{0,\varphi_0}<0,$$

容易验证它是成立的。

由以上分析可知，只有当杆长与圆柱半径的比值l/a足够大，使得$\overline{OC}>0$时，平衡位置才是稳定的。临界情况是$\overline{OC}=0$，这相当于

$$a=l\sin\varphi_0\cos\varphi_0,$$

把它和平衡条件

$$l\sin\varphi_0=a\cos\varphi_0/\sin^2\varphi_0$$

联立，解出

$$l/a=2,\quad \varphi_0=45°,$$

也就是说只有杆长$2l$超过圆柱半径a的四倍时，平衡位置才是稳定的。

图10.19表示对于不同的比值l/a，θ保持为零，而φ在改变时，杆AD之质心E的轨迹。轨迹上最低点代表平衡时E的位

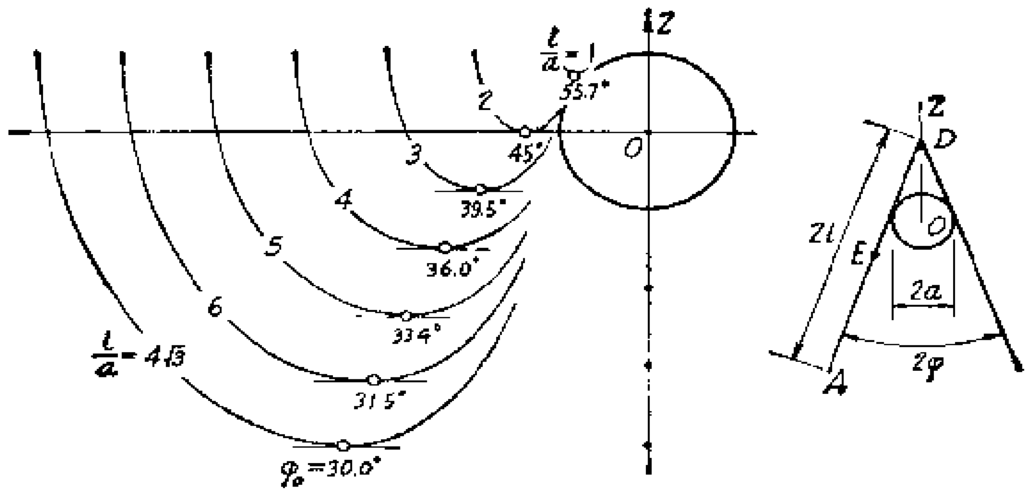


图10.19　$\theta=0$，φ 取不同值时 E 点的轨迹

置，那里写的数值是 φ_0 的值。当 $l<2a$ 时，E 的最低点就高出O点了。▌

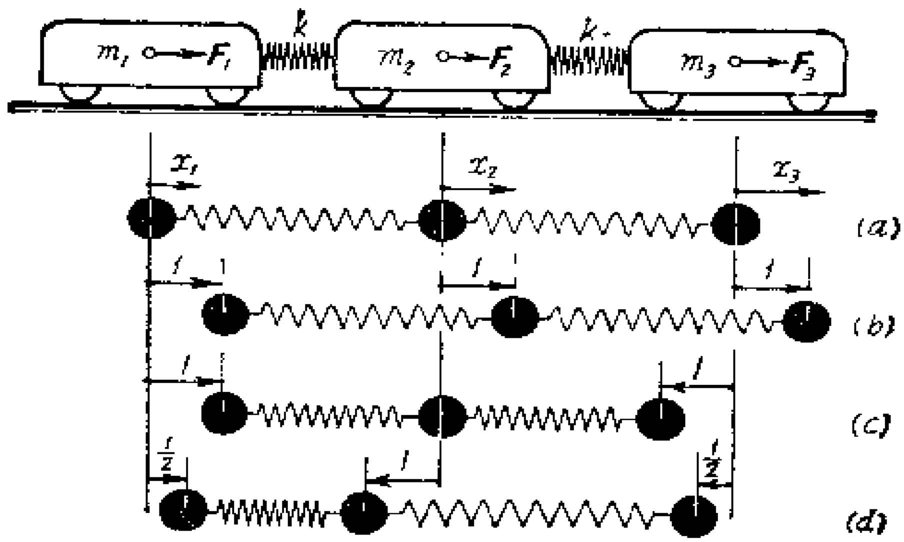
＊＊＊　假设上例中铰链 D 被限制在过O点的竖直线上，但可上下自由滑动，问平衡位形的稳定性有没有变化？＊＊＊

例10.13　三节相同的车厢 m_1, m_2, m_3 用两个刚性系数都是 k 的弹簧相连，停在光滑的水平轨道上（图10.20(a)）。设车厢上受到的水平外力分别是 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ 和 $\boldsymbol{F}_3$。求列车平衡的条件。我们规定采用广义坐标 q_1, q_2, q_3，它们与三车厢各自的水平位移 x_1, x_2, x_3 的关系是

$$
\begin{cases}
x_1 = q_1 + q_2 + \dfrac{1}{2} q_3, \\
x_2 = q_1 - q_3, \\
x_3 = q_1 - q_2 + \dfrac{1}{2} q_3.
\end{cases}
$$

解　取这样的广义坐标，在研究振动问题时有其优越性（见10-7）。现在分析它的特点。当 $q_1=1, q_2=0, q_3=0$ 时，

$$x_1=1, \qquad x_2=1, \qquad x_3=1,$$



(a) x_1, x_2, x_3是位移；　　(b) $q_1=1$, $q_2=0$, $q_3=0$；

(c) $q_1=0$, $q_2=1$, $q_3=0$；　　(d) $q_1=0$, $q_2=0$, $q_3=1$.

图10.20　一种特殊的广义坐标q_1, q_2, q_3

所以q_1坐标反映了列车组的平动，此时两个弹簧都没有变形，如图中(b)所示。当$q_2=1$，$q_1=0$，$q_3=0$时，

$$x_1=1,\qquad x_2=0,\qquad x_3=-1,$$

所以q_2坐标代表中间一节不动，而两旁的车厢相向或反向移动，两个弹簧受到同样的压缩量q_2，如图中(c)所示。当$q_3=1$，$q_1=0$，$q_2=0$时，

$$x_1=1/2,\qquad x_2=-1,\qquad x_3=1/2,$$

它代表的位形是两个弹簧拉压总是相反，而三个车厢组成的系统的质心保持不动(q_1, q_2, q_3均非零时，列车组的位形是什么？)。主动力包括弹性力和外力$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$两部分，而弹性力是有势的，所以在计算广义力时，可以分两部分来进行。弹性力的势能是

$$V=\frac{k}{2}(x_2-x_1)^2+\frac{k}{2}(x_3-x_2)^2$$

$$=k\left(q_2^2+\frac{9q_3^2}{4}\right).$$

故与弹性力对应的广义力为

$$-\frac{\partial V}{\partial q_1}=0, \quad -\frac{\partial V}{\partial q_2}=-2kq_2, \quad -\frac{\partial V}{\partial q_3}=-\frac{9}{2}kq_3.$$

外力系$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3)$的元功是

$$\delta W=F_1\delta x_1+F_2\delta x_2+F_3\delta x_3.$$

以 x_i 与 q_i 之间的关系代入，得

$$\delta W=(F_1+F_2+F_3)\delta q_1+(F_1-F_3)\delta q_2$$

$$+\left(\frac{F_1}{2}-F_2+\frac{F_3}{2}\right)\delta q_3.$$

因此这部分广义力是

$$Q_1'=F_1+F_2+F_3, \quad Q_2'=F_1-F_3,$$

$$Q_3'=\frac{F_1}{2}-F_2+\frac{F_3}{2}.$$

合在一起，并根据虚位移原理得平衡条件为

$$Q_1=F_1+F_2+F_3=0,$$

$$Q_2=F_1-F_3-2kq_2=0,$$

$$Q_3=\frac{F_1}{2}-F_2+\frac{F_3}{2}-\frac{9}{2}kq_3=0.$$

第一个条件相当于外力主向量等于零，后两个条件是弹性变形条件。▮

例10.14 万向接头传动机构（图10.21）处于平衡状态。求它的主动轴及从动轴上力矩 M_1 和 M_2 之间的关系，已知两轴之间的夹角是 α（α 通常很小）。

解 设 Oy_1 沿主动轴，Oy_2 沿从动轴的反向，取 z 轴垂直于 Oy_1 和 Oy_2 所组成的平面，由此决定了两个右手坐标系 Ox_1y_1z 和 Ox_2y_2z，它们在惯性空间都是固定的。主动轴的转动由 OA 轴在

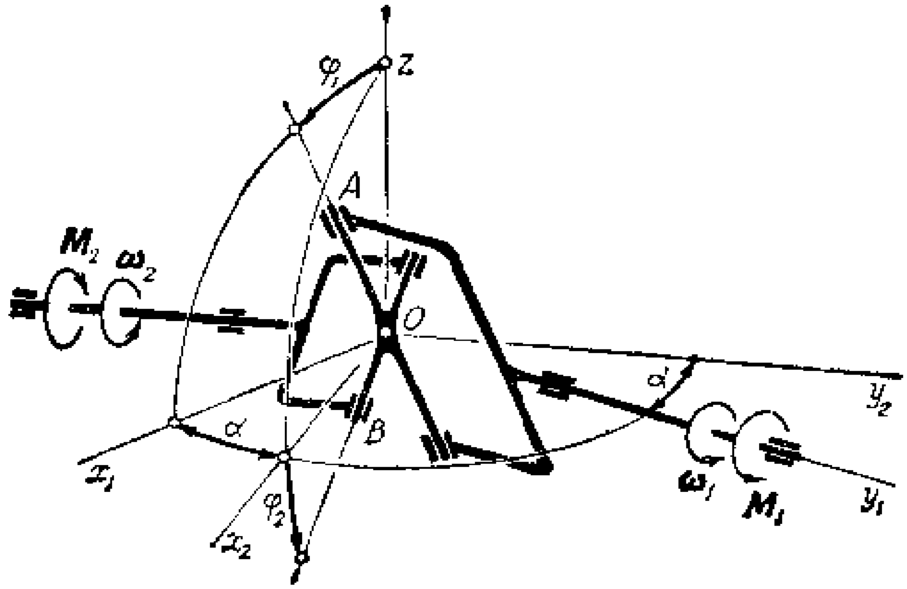


图10.21 方向接头的平衡

Ox_1z 平面中的转角 φ_1 给出，从动轴的转动则由 OB 轴在 Ox_2z 平面中的转角 φ_2 给出。

在理想约束（所有接头的摩擦都忽略）的情况下，平衡条件是

$$M_1\delta\varphi_1-M_2\delta\varphi_2=0,$$

所以力矩 M_1，M_2 与 $\delta\varphi_1,\delta\varphi_2$ 大小成反比；或者说与两轴的角速度 $\omega_1=\dot{\varphi}_1$ 和 $\omega_2=\dot{\varphi}_2$ 成反比。

OA 轴在 Ox_1y_1z 中的方向余弦是

$$(\sin\varphi_1,0,\cos\varphi_1).$$

OB 轴在 Ox_2y_2z 中的方向余弦是

$$(\cos\varphi_2,0,-\sin\varphi_2),$$

折算到 Ox_1y_1z 中，方向余弦是

$$(\cos\varphi_2\cos\alpha,\cos\varphi_2\sin\alpha,-\sin\varphi_2).$$

由于 OA 与 OB 互相垂直，它们在同一坐标架中的相应方向余弦乘积之和应等于零，即

$$\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos\alpha+0-\cos\varphi_1\sin\varphi_2=0.$$

由此解得

$$\varphi_2=\text{arc tg}(\text{tg}\varphi_1\cos\alpha)。$$

求变分得到

$$\delta\varphi_2=\delta\varphi_1\frac{\cos\alpha}{\cos^2\varphi_1+\cos^2\alpha\sin^2\varphi_1},$$

于是有

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{\cos\alpha}{\cos^2\varphi_1+\cos^2\alpha\sin^2\varphi_1}。$$

上式中分母的最大值为 1（当 $\varphi_1=0, 180°, \cdots$），最小值为 $\cos^2\alpha$（当 $\varphi_1=90°, 270°, \cdots$）。可见主动力矩与从动力矩之比在 $\cos\alpha$ 与 $1/\cos\alpha$ 之间作周期性变化，主动轴转一圈分母的最大值与最小值各出现两次。▌

例10.15 由虚位移原理推导出自由刚体的平衡条件（即刚体静力学平衡条件）。

解 在刚体上取固连的直角坐标架 $Oxyz$，它与空间固定坐标架 $OXYZ$ 重合，刚体上一点M的坐标为(x,y,z)。当自由刚体有一虚位移时，点M相对 $Oxyz$ 的坐标仍然是(x,y,z)，它相对于 $OXYZ$ 的坐标变为$(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$。由解析几何知道

$$\begin{bmatrix}x+\delta x\\ y+\delta y\\ z+\delta z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta x_O\\ \delta y_O\\ \delta z_O\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}。\quad (1)$$

其中$(\delta x_O, \delta y_O, \delta z_O)$和$(\delta x, \delta y, \delta z)$分别是固连标架的原点$O$和点$M$的虚位移向量在 $OXYZ$ 中的分量，矩阵中每一列的元素分别是固连坐标轴相对于 $OXYZ$ 的方向余弦（见1-2）。在虚位移中，刚体的转动角是一阶小量，所以在一般情况下有

$$p_{ii}=\cos\theta_i=1-o(\theta_i)\quad (i=1,2,3),$$

其中 θ_i 是一阶小量。其余六个 p_{ij} $(i\neq j)$ 都是一阶小量。因为 x 轴与 y 轴正交，故

$$p_{11}p_{21}+p_{12}p_{22}+p_{13}p_{23}=0.$$

上式左端第三项是二阶小量，因而保留一阶小量时有

$$p_{21}=-p_{12}.$$

令 $p_{21}=\delta\theta_3$。同理，可得 $p_{13}=-p_{31}$，令 $p_{13}=\delta\theta_2$；$p_{32}=-p_{23}$，令 $p_{32}=\delta\theta_1$。于是矩阵 $[p_{ij}]$ 可写成为

$$[p_{ij}]=\begin{bmatrix} 1 & -\delta\theta_3 & \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 & 1 & -\delta\theta_1 \\ -\delta\theta_2 & \delta\theta_1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

将(2)代入(1)，化简后得

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta x_O \\ \delta y_O \\ \delta z_O \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -\delta\theta_3 & \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 & 0 & -\delta\theta_1 \\ -\delta\theta_2 & \delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{3}$$

设作用在刚体上有若干个外力（亦即主动力），其中作用在点 M 处的力在 $OXYZ$ 中的分量为 (F_x, F_y, F_z)，则主动力的总虚功是

$$\delta W=\sum(F_x\delta x+F_y\delta y+E_z\delta z),$$

其中 $\sum$ 指对所有外力求和。以式(3)代入，化简后得

$$\delta W=(\sum F_x)\delta x_0+(\sum F_y)\delta y_0+(\sum F_z)\delta z_0$$
$$+(\sum L_x)\delta\theta_1+(\sum L_y)\delta\theta_2+(\sum L_z)\delta\theta_3.$$

其中

$$L_x=yF_z-zF_y,\quad L_y=zF_x-xF_z,\quad L_z=xF_y-yF_x.$$

它们分别是点 M 处的外力对 OX, OY, OZ 三轴的矩。由于 δx_O，$\delta y_O, \delta z_O, \delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3$ 六个虚位移分量彼此是独立的，所以总虚功 δW 为零等价于①

---

① 如令 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则(3)可写成

$$\delta\boldsymbol{r}=\delta\boldsymbol{r}_O+\delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r},$$

$\delta\boldsymbol{\theta}=\delta\theta_1\boldsymbol{i}+\delta\theta_2\boldsymbol{j}+\delta\theta_3\boldsymbol{k}$ 是(3)中反对称矩阵的相伴向量，即无限小角位移向量。于是

$$\delta W=\Sigma\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}=(\Sigma\boldsymbol{F})\cdot\delta\boldsymbol{r}_O+\Sigma(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})\cdot\delta\boldsymbol{\theta}.$$

由此可得平衡条件的向量形式。

$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0,\quad \sum F_z=0,$$
$$\sum L_x=0,\quad \sum L_y=0,\quad \sum L_z=0.$$

这就是自由刚体的平衡条件。▍

10-3 达朗伯原理

达朗伯原理是关于非自由质点动力学的一个原理。

设作用在非自由的质点上有主动力 $\boldsymbol{F}$ 和约束力 $\boldsymbol{N}$。按照达朗伯的原始思想，可将 $\boldsymbol{F}$ 分解为两部分（图10.22）：一部分使质点产生加速度 $\boldsymbol{a}$，叫做发动力 $\boldsymbol{F}_{发动}$，有关系式

$$\boldsymbol{F}_{发动}=m\boldsymbol{a};$$

余下的一部分叫损失力，所以有关系式

$$\boldsymbol{F}_{损失}=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_{发动}.$$

将前一式代入，得

$$\boldsymbol{F}_{损失}=\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{a},$$

即损失力等于主动力 $\boldsymbol{F}$ 加上$(-m\boldsymbol{a})$。

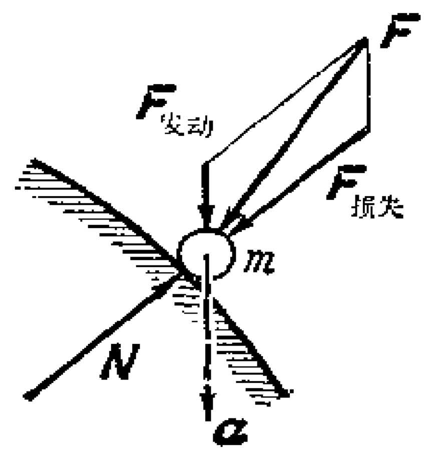


图10.22 达朗伯原理

达朗伯原理的表述为①：作用于质点上的损失力在每一瞬时位置上都为约束力所平衡。它的表达式为

$$\boldsymbol{F}_{损失}+\boldsymbol{N}=0. \tag{10.37}$$

如果我们把静力学中质点的平衡条件解释为“主动力为约束力所平衡”，即

$$\boldsymbol{F}_{主动}+\boldsymbol{N}=0.$$

这样，非自由质点在运动过程中应满足的条件就和静力学中质点

① 达朗伯最初的说法与此接近，但他说的不是力，而是在一微小时间间隔中动量的改变。

的平衡条件具有了同样的形式。

达朗伯原理的主题思想是把牛顿定律推广，用于受约束质点，这就为后来的非自由质点系动力学奠定了基础。达朗伯（J. le Rond d'Alembert, 1717—1783)在《动力学教程》(1743年)中提出这个原理以后一百多年，即到了十九世纪前半叶，人们开始把 $-m\boldsymbol{a}$ 这个量叫做**惯性力**，原理就被解释为，在加上惯性力 $\boldsymbol{F}_{惯}=-m\boldsymbol{a}$ 以后，质点的主动力与惯性力的向量和（就是损失力）为约束力所平衡，即式(10.37)成为

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{惯}+\boldsymbol{N}=0. \tag{10.38}$$

在现代的许多著作中，特别在一些工程技术书籍里，突出了达朗伯原理中动力学问题可以采取静力学形式这一特点，而不强调"受约束"这个前提。他们解释说：牛顿定律是 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$(如果有约束力，则也包括在外力 $\boldsymbol{F}$ 之中)，如果人为地引进一个惯性力 $\boldsymbol{F}_{惯}=-m\boldsymbol{a}$，假想（只是假想而已）把惯性力也加到质点上去，那么就应该有关系式

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{惯}=0.$$

注意这个关系式中的 $\boldsymbol{F}$ 与式(10.38)中的 $\boldsymbol{F}$ 含义不一样，这里的 $\boldsymbol{F}$ 包含了约束力。他们把以下的内容叫做达朗伯原理：质点在运动过程中每一瞬时外力与惯性力平衡。原理由达朗伯本人最初的表述发展到这种形式后，开始显示了理论认识上的一个飞跃。人们的原意是讨论质点的动力学问题，现在达朗伯原理说，只要引入惯性力，则动力学问题也可以像静力学平衡问题一样来处理，于是"动"与"静"就相通了。

在工程技术上处理动力学问题时，对于一个质点系，不论是自由的还是受约束的，甚至是刚体、刚体系、弹性体或流体等等，在它每一个质点上附加所谓"惯性力"($-m_i\boldsymbol{a}_i$)的作用，就可以使用静力学中熟悉的概念和办法来处理。这种手法简单而行之有效，乐于为工程技术人员所采用，也容易被非专业人员所领会。例如，说"一个飞轮转得太快，惯性力（离心力）会把轮圈

拉断”。这种方法工程技术界称之为“达朗伯原理方法”，或者惯性力法，确切的名称应是“静态动力学方法”，或简称“动静法”。

在第八章中，我们定义了惯性力，它是和非惯性参考系的概念紧密相联系的，它和现在所说的惯性力不完全一样。例如在质点系中，如果把每一个质点的 $-m_i\boldsymbol{a}_i$ 都叫做惯性力，那么，以整体而言就不知道它们是相对于哪一个非惯性参考系的。所以在这两种惯性力可能产生混淆的地方，我们把现在的惯性力 $-m_i\boldsymbol{a}_i$ 叫做达朗伯惯性力。

现将达朗伯原理用来解决非自由质点系的动力学问题。

设非自由质点系有 n 个质点，质量分别为 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$，每个质点受约束力 $\boldsymbol{N}_i$，所有约束都是理想的，即有

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0.$$

引用达朗伯“损失力”的提法，由式(10.37)得

$$\boldsymbol{N}_i=-\boldsymbol{F}_{i损失},$$

代入前一式可得

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{i损失}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0.$$

如果质点系处于静止状态，则有 $\boldsymbol{F}_{i损失}=\boldsymbol{F}_i$（主动力），那么上式就是虚位移原理的表达式。对于动力学问题，质点有加速度 $\boldsymbol{a}_i=\ddot{\boldsymbol{r}}_i$，则上式成为

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0.}\qquad(10.39)$$

上式称为**拉格朗日形式的达朗伯原理**[①]，也叫做**动力学普遍方程**。

① 拉格朗日在他的《分析力学》中提出此式，并以此为基础进行一系列的推导。

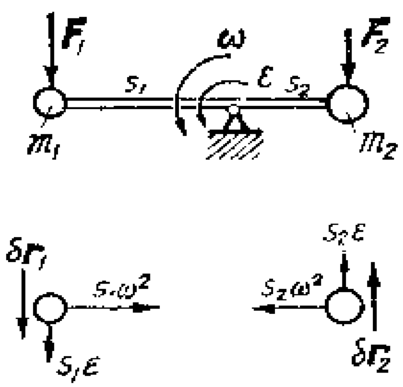


图10.23　杠杆的转动

例10.16　质量为 m_1 和 m_2 的质点，由过固定支点的水平轻杆相连(图10.23)；外力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 保持与杆垂直，并且与支点的距离分别为 s_1 和 s_2。求杆在平面内的瞬时角加速度 ε，并列出系统的动力学方程。

解　两质点的加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ ($i=1,2$) 包括向心加速度（大小为 $s_i^2\omega$）和切向加速度（大小为 $s_i\varepsilon$）两部分，向心加速度的方向与虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 相垂直，所以在动力学普遍方程中不出现。根据式(10.39)得

$$(F_1-m_1s_1\varepsilon)\delta r_1-(F_2-m_2s_2\varepsilon)\delta r_2=0, \qquad (1)$$

由于 $\delta r_1/\delta r_2=s_1/s_2$，代入得

$$\varepsilon=\frac{F_1s_1-\boldsymbol{F}_2s_2}{m_1s_1^2+m_2s_2^2}.$$

这个系统只有一个自由度，取杠杆的转角 φ 为广义坐标，有

$$\delta r_1=s_1\delta\varphi, \qquad \delta r_2=s_2\delta\varphi, \qquad \varepsilon=\ddot{\varphi},$$

则式(1)成为

$$[(F_1s_1-F_2s_2)-(m_1s_1^2+m_2s_2^2)\ddot{\varphi}]\delta\varphi=0,$$

不难看出其中 $F_1s_1-F_2s_2$ 就是广义力 Q_φ，即力矩，而 $m_1s_1^2+m_2s_2^2$ 就是转动惯量 J。

由于 $\delta\varphi\neq0$，得

$$J\ddot{\varphi}=Q_\varphi.$$

这就是系统的动力学方程，与由动量矩定理得出的方程一致。

引用动能表达式

$$T=\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2,$$

则上式可以写成拉格朗日形式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_{\varphi}. \quad ▌$$

例10.17 应用动力学普遍方程列出例10.5中质点的运动微分方程。

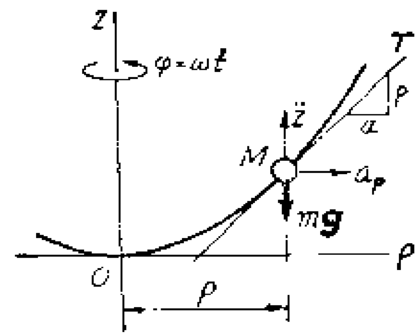


图10.24 列出动力学方程

解 由动力学普遍方程得

$$(-mg\boldsymbol{k}-m\boldsymbol{a})\cdot\delta\boldsymbol{r}=0,$$

虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 在 $O\rho z$ 平面内沿抛物线

$$\rho^2=2az$$

的切线 MT。于是上式可写成

$$(-ma_{\rho})\delta\rho+(-mg-m\ddot{z})\delta z=0.$$

由约束条件 $\rho^2=2az$ 得

$$a\delta z=\rho\delta\rho, \quad a\ddot{z}=\rho\ddot{\rho}+\dot{\rho}^2.$$

再由约束条件 $\varphi=\omega t$ 得

$$a_{\rho}=\ddot{\rho}-\rho\omega^2,$$

代入上式得

$$[m(a^2+\rho^2)\ddot{\rho}+m\rho\dot{\rho}^2+ma\rho(g-a\omega^2)]\delta\rho=0.$$

因 $\delta\rho\neq0$，故方括号中的式子等于零，它与例10.5中的结果一致。

引用动能表达式

$$T=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2),$$

则上式可以写成拉格朗日形式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \rho}-Q_{\rho}=0. \quad ▌$$

例10.18 应用动力学普遍方程，列出例10.13中系统的动力学方程（图10.20）。

解 设三质点（车厢）的位移分别是 x_1, x_2, x_3，主动力包括

外力和弹性力，它们分别是

$F_1+k(x_2-x_1)$，$F_2-k(x_2-x_1)+k(x_3-x_2)$，$F_3-k(x_3-x_2)$。

代入动力学普遍方程得

$$[F_1+k(x_2-x_1)-m\ddot{x}_1]\delta x_1+[F_2+k(x_1-2x_2+x_3)$$
$$-m\ddot{x}_2]\delta x_2+[F_3-k(x_3-x_2)-m\ddot{x}_3]\delta x_3=0。\quad (1)$$

由于$\delta x_1,\delta x_2,\delta x_3$彼此独立且又任意，上式每一个方括号等于零，因此就可以得到以直角坐标表出的动力学方程

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1=F_1+k(x_2-x_1), \\ m\ddot{x}_2=F_2+k(x_1-2x_2+x_3), \\ m\ddot{x}_3=F_3-k(x_3-x_2)。\end{cases}$$

这就是牛顿定律给出的方程。

现在要用例10.13中所提到的广义坐标q_1,q_2,q_3，它们与x_1，x_2,x_3的关系用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}.$$

因此有虚位移关系式

$$\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix}.$$

代入式(1)，整理后得

$$[(F_1+F_2+F_3)-3m\ddot{q}_1]\delta q_1+[F_1-F_3-2kq_2-2m\ddot{q}_2]\delta q_2$$
$$+\left[\frac{1}{2}F_1-F_2+\frac{1}{2}F_3-\frac{9}{2}kq_3-\frac{3}{2}m\ddot{q}_3\right]\delta q_3=0,$$

因为$\delta q_1,\delta q_2,\delta q_3$也是彼此独立的，因此可得出通过广义坐标表示的动力学方程

$$
\begin{cases}
3m\ddot{q}_1 = F_1 + F_2 + F_3, \\
2m\ddot{q}_2 = F_1 - F_3 - 2kq_2, \\
\dfrac{3}{2}m\ddot{q}_3 = \dfrac{1}{2}F_1 - F_2 + \dfrac{1}{2}F_3 - \dfrac{9}{2}kq_3.
\end{cases} \tag{2}
$$

当系统平衡时得出

$$
\begin{cases}
Q_1 = F_1 + F_2 + F_3 = 0, \\
Q_2 = F_1 - F_3 - 2kq_2 = 0, \\
Q_3 = \dfrac{1}{2}F_1 - F_2 + \dfrac{1}{2}F_3 - \dfrac{9}{2}kq_3 = 0,
\end{cases}
$$

其中 Q_1, Q_2, Q_3 就是相应的广义力。这就是例10.13的结果。

引用动能表达式

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) = \frac{1}{2}m\left(3\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + \frac{3}{2}\dot{q}_3^2\right),$$

因此式(2)也可以写成拉格朗日形式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3). \ \blacksquare$$

以上三个例子都说明，对于非自由质点系，无论约束是定常的还是非定常的，当动力学普遍方程用广义坐标形式表示出来时，它总是可以写成如下的形式：

$$\sum_{i=1}^{s}\left[\left(Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\right] = 0.$$

由于 s 个 δq_i 彼此是独立的，圆括号中的项应分别等于零。这说明由动力学普遍方程可以导出拉格朗日方程，下一节对此作一般性的证明。

10-4 拉格朗日方程及其首次积分

有了以前各节的准备，段一般的拉格朗日方程只需以简略的步骤加以推导，就不难为读者所接受了。

设具有理想约束（定常或非定常约束）的质点系，其广义坐标是 $q_1,q_2,\cdots,q_s$，则质点系中任一质点 i $(i=1,2,\cdots,n)$的向径可以表示为

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_s;t), \tag{10.40}$$

速度是

$$\boldsymbol{v}_i=\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}.$$

将上式对 $\dot{q}_j$ 求偏导数，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}. \tag{10.41}$$

将 $\boldsymbol{v}_i$ 对 q_j 求偏导数，并利用全导数公式，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j}=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j\partial t}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right). \tag{10.42}$$

式(10.41)和(10.42)是推导拉格朗日方程的两个重要关系式，当 $n=1,s=3$时，它们就是式(10.3)和(10.5)。

现将动力学普遍方程(10.39)通过 s 个广义坐标来表示。根据式(10.40)得虚位移表达式（即式(10.34)）

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j,$$

代入式(10.39)得

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\cdot\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right)=0.$$

由广义力 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_s$ 的定义(见10-2)，

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^{s}Q_j\delta q_j,$$

代入上式得

$$\sum_{j=1}^{s}\left[Q_j-\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j=0. \tag{10.43}$$

式(10.43)和(10.39)是动力学普遍方程的两种不同表示形式，最大的不同点是在式(10.39)中 n 个 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 不是互相独立的，而式(10.43)中 s 个 δq_j 是彼此独立的。所以式(10.43)中各项可以“拆开”处理，即等价于每一个方括号分别等于零，而对式(10.39)却不能这样做。于是有

$$Q_j - \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1,2,\cdots,s)。 \tag{10.44}$$

上式第二项当 $n=1$ 时，就是 $m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_j$，这已在10-1中计算过，并通过动能表示成式(10.6)。当 $n>1$ 时，也可以得到类似的关系式，推导如下：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j} \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}。
\end{aligned} \tag{10.45}$$

在推导过程中已使用了式(10.41)和(10.42)。式(10.45)中的

$$T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s; q_1, q_2, \cdots, q_s; t)$$

是系统的总动能，它是广义坐标及其导数和时间的函数。

将式(10.45)代入式(10.44)就得出

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \quad (j=1,2,\cdots,s).} \tag{10.46}$$

这就是一般的非自由质点系的第二类拉格朗日方程，简称**质点系的拉格朗日方程**。作为特例，它当然也适用于自由的质点系（即$k=0$，$s=3n$的情形），以及自由的或非自由的质点（即$n=1$的情形，这在10-1中已讨论过）的情况。

在主动力具有势能函数$V(q_1,q_2,\cdots,q_s;t)$的情况下，有

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=-\delta V=-\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j,$$

这里δV是势能在时刻t"冻结"不变时的全微分(等时变分)。因此

$$Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (j=1,2,\cdots,s). \tag{10.47}$$

代入式(10.46)，并令拉格朗日函数$L=T-V$，得到

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \quad (j=1,2,\cdots,s).} \tag{10.48}$$

这就是主动力有势时的拉格朗日方程。

非自由质点系的第一类拉格朗日方程

第一类拉格朗日方程是拉格朗日采用不定乘子法导出的，其特点是可以由此求出约束力，但方程数目要比第二类方程多出$2k$个（k是约束方程的数目），因此在不需要求出约束力的问题中采用第一类方程并不方便。下面是第一类方程的推导。

考虑由n个质点组成的非自由质点系，其每一个质点任意的曲线坐标依次记作$x_1,x_2,\cdots,x_{3n}$。设质点系有k个理想的几何约束，方程为(10.28)，则虚位移δx_i应该满足关系式(10.33)。根据与推导式(10.43)和(10.45)同样的方法，可以得出通过曲线坐

标表示的动力学普遍方程为

$$\sum_{j=1}^{3n}\left[Q_j-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right)+\frac{\partial T}{\partial x_j}\right]\delta x_j=0, \qquad (10.49)$$

其中 Q_j 是与坐标 x_j 对应的广义力。

由于$3n$个 δx_j 并不是彼此独立的，只有 $s=3n-k$ 个是独立的，所以不能像式(10.43)那样"拆开"处理，得出每一个方括号都等于零的结论。为此，引进 k 个（等于约束的数目）尚未确定的乘子 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，称为拉格朗日乘子，将式(10.33)中每一个与 i 对应的式子乘以 λ_i，并依次与式(10.49)相加，得

$$\sum_{j=1}^{3n}\left[Q_j-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right)+\frac{\partial T}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\delta x_j=0.$$

下面我们设法确定拉格朗日乘子。上式$3n$个虚位移 δx_j 中有 $s=3n-k$ 个是独立的，因此我们可以选择 s 个独立的虚位移，其余 k 个虚位移可以通过它们表出。我们总可以适当地选择 k 个乘子 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，使得后面 k 个不独立的虚位移前的系数变为零。这样以上等式中就只剩下包含 s 个独立虚位移的项，所以它们前面的系数为零。至此$3n$个方括号就全部为零，即有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_j}=Q_j+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (j=1,2,\cdots,3n). \qquad (10.50)$$

这就是质点系的第一类拉格朗日方程，它共有$3n$个方程，连同 k 个约束方程(10.28)，可以确定$3n+k$个未知函数，即质点系中各质点的 $3n$ 个坐标以及 k 个拉格朗日乘子。很明显，式(10.24)和(10.26)是式(10.50)的特殊情况。我们可以用10-1中类似的方法解释

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

的物理意义，它就是作用在第 l 个质点（它的一个曲线坐标是 x_j）上的约束力 $\boldsymbol{R}_l$ 与 $\partial \boldsymbol{r}_l/\partial x_j$ 的标积，由此就可以求出约束力。

*质点系拉格朗日方程的显式

方程(10.46)是广义坐标的一组(s个)二阶微分方程。我们来写出它们的显式。

动能T的表达式已在7-3中导出过，即当$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,\cdots,q_s;t)$，$j=1,2,\cdots,s$时，有

$$T=T_0+\sum_{j=1}^{s}b_j\dot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \qquad (10.51)$$

其中
$$T_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t},$$

$$b_j=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j},$$

$$m_{jk}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}.$$

它们都是广义坐标$q_1,\cdots,q_s$和时间t的函数，也就是说T是$\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s$的非齐次二次式

$$T=T_0+T_1+T_2,$$

其中T_2,T_1和T_0分别是$\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s$的齐二次式、齐一次式和齐零次式。

如果约束全部是定常的，可以选取这样的坐标，使得$\boldsymbol{r}_i$与$q_1,\cdots,q_s$的关系式中不显含时间t，即

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,\cdots,q_s),$$

则式(10.51)中的$T_0=0$，$b_j=0$ $(j=1,\cdots,s)$，所以动能就成为$\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s$的二次齐次式

$$T=T_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k. \qquad (10.52)$$

对比10-1中式(10.11)，可知式(10.52)是它的一种推广。

由式(10.51)得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)=\sum_{j=1}^{s} m_{ij}\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{s}\dot{m}_{ij}\dot{q}_j+\dot{b}_i,$$

其中

$$\dot{m}_{ij}=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial m_{ij}}{\partial t},$$

$$\dot{b}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial b_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial b_i}{\partial t}.$$

另外有关系式

$$\sum_{j=1}^{s}\dot{m}_{ij}\dot{q}_j=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial m_{ij}}{\partial t}\dot{q}_j$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}+\frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial m_{ij}}{\partial t}\dot{q}_j,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{\partial T_0}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial b_j}{\partial q_i}\dot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k.$$

将以上各式代入拉格朗日方程(10.46),得出一般形式的运动微分方程

$$\sum_{j=1}^{s} m_{ij}\ddot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}+\frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j}-\frac{\delta m_{jk}}{\delta q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial t}+\frac{\partial b_i}{\partial q_j}-\frac{\partial b_j}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j+\frac{\partial b_i}{\partial t}-\frac{\partial T_0}{\partial q_i}$$

$$=Q_i \quad (i=1,2,\cdots,s). \qquad (10.53)$$

为了缩短书写，引入克氏第一类记号

$$[jk,i]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}+\frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j}-\frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i}\right),$$

于是式(10.53)可写成

$$\sum_{j=1}^{s} m_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}[jk,i]\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{s}\gamma_{ij}\dot{q}_j$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial m_{ij}}{\partial t}\dot{q}_j + \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_i} = Q_i$$

$$(i=1,2,\cdots,s)。\qquad (10.54)$$

其中 $$\gamma_{ij} = -\gamma_{ji} = \frac{\partial b_i}{\partial q_j} - \frac{\partial b_j}{\partial q_i},$$

它们对 i 与 j 是反对称的。式(10.54)中这些带有反对称系数的线性项 $\gamma_{ij}\dot{q}_j$ 叫做陀螺项。有关陀螺项的一个简单例子见后面的例10.23（图10.29）。

方程(10.54)是10-1中式(10.19)的推广。作为 $q_i(i=1,\cdots,s)$的微分方程组来看，它是非线性的，但是对 $\ddot{q}_1,\cdots,\ddot{q}_s$来说却是线性方程。可以证明由 m_{ij} 组成的矩阵 $\mathbf{M}=[m_{ij}]$是正定的①，所以存在逆矩阵 $\mathbf{M}^{-1}$，于是可以从(10.54)中解出 $\ddot{q}_1,\cdots,\ddot{q}_s$来，最后可以将运动微分方程写成如下的形式

$$\ddot{q}_i + f_i(q_1,\cdots,q_s;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s;t) = 0 \quad (i=1,2,\cdots,s)。$$

拉格朗日方程的首次积分

首次积分可以使运动微分方程降阶。常见的拉格朗日方程的首次积分有两种，一种是以前讲过的动量积分和动量矩积分的推广，称为广义动量积分；另一种是机械能量积分的推广，称为广义能量积分。

设作用在系统上的主动力有势，则拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j=1,2,\cdots,s), \qquad (10.48)$$

其中 $L=L(q_1,\cdots,q_s;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s;t)$。

① 它的物理意义是动能只能是非负量，且只有在所有质点的速度为零时才能等于零。数学证明从略。

如果在L中不显含某个广义坐标，比如是q_i，则这个坐标被称为**循环坐标或可遗坐标**。对于循环坐标q_i来说，有

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,$$

因此式(10.48)成为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0.$$

于是得到一个首次积分

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\text{常量}, \tag{10.55}$$

它称为**循环积分**。

广义坐标q_i对时间的导数$\dot{q}_i$叫做**广义速度**，系统动能T对广义速度$\dot{q}_i$的偏导数称为(相应于q_i的)**广义动量**，用p_i表示，即

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \tag{10.56}$$

由于势能V与广义速度$\dot{q}_i$无关，所以$L=T-V$对$\dot{q}_i$的偏导数也就是广义动量p_i。于是式(10.55)可写成为

$$p_i(q_1,\cdots,q_s;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s;t)=\text{常量}. \tag{10.57}$$

这说明**广义动量守恒**，故循环积分又称**广义动量积分**。系统中有几个循环坐标就有几个这样的首次积分。例如在质点抛射运动中，用直角坐标表示时

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz,$$

故x,y是循环坐标，对应有两个循环积分

$$p_x=\text{常量},\quad p_y=\text{常量},$$

即为水平方向的两个动量守恒式。容易算出$p_x=m\dot{x}$，$p_y=m\dot{y}$。

又例如，在质点有心运动中，用极坐标表示时，

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2)-V(\rho).$$

故 φ 是循环坐标，对应一个循环积分

$$p_\varphi=m\rho^2\dot{\varphi}=常量,$$

这就是我们熟知的动量矩守恒式。以上两例说明，动量和动量矩都是广义动量的特例。

* * *　刚体定轴转动时，如取转角 φ 为广义坐标，相应的广义动量 p_φ 是什么？ * * *

动能 T 是广义坐标 $q_1,\cdots,q_s$ 和广义速度 $\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s$ 以及时间 t 的函数。它对广义速度来说是一个非齐次的二次式，即可以写成为

$$T=T_2+T_1+T_0,$$

其中 T_2 是 $\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s$ 的齐次二次式；T_1 是齐次一次式，即广义速度的线性组合；T_0 是齐次零次式，即 T_0 不包含广义速度。由齐次式的性质可知

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=2T_2,\qquad \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=T_1,\qquad \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=0.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=2T_2+T_1.$$

因为势能函数 V 与 $\dot{q}_i$ 无关，所以有

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=2T_2+T_1. \tag{10.58}$$

拉格朗日函数 L 也是广义坐标、广义速度和时间的函数，因此它对时间的全导数是

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i, \tag{10.59}$$

利用拉格朗日方程(10.48)，上式右端第二项成为

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)-\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i.$$

于是式(10.59)可简化成为

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right),$$

经移项后得

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right)=-\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{10.60}$$

上式左端括号中的项叫做**广义能量**，记作 h。以式(10.58)代入，h 可表成

$$h=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=2T_2+T_1-L.$$

又以 $L=T-V=T_2+T_1+T_0-V$ 代入，最后广义能量可写成为

$$h=T_2-T_0+V. \tag{10.61}$$

于是式(10.60)给出了广义能量的变化率表示式

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}.$$

如果

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0,$$

那么就有一个**广义能量积分**：

$$h(q_1,\cdots,q_s;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s;t)=\text{常量},$$

即如果拉格朗日函数 L 中不显含 t，那么**广义能量守恒**。

作为特例，对于定常系统来说，有 $T=T_2, T_0=0$①，则广义能量积分就成为

$$T+V=\text{常量},$$

也就是机械能守恒。可见广义能量守恒是机械能守恒的推广。对于非定常系统来说，如果 L 不显含 t，则有广义能量守恒，但机械能不一定守恒。

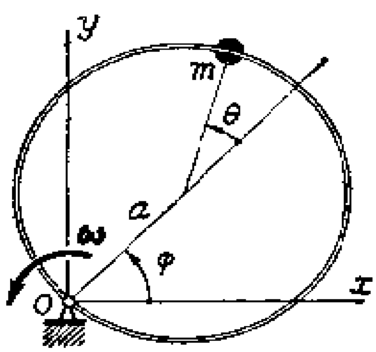


图10.25　质点的广义能量守恒

例10.19　半径为 a 的圆环以匀角速 ω 绕 O轴在水平面内转动，环上有一质量为 m 的质点(图10.25)。求质点运动微分方程的首次积分。

解　这个质点系中只有一个质点。取 x,y 轴，θ 角，φ 角如图所示，其中 $\varphi=\omega t$，则质点的坐标为

$$x=a\cos\omega t+a\cos(\omega t+\theta),$$

$$y=a\sin\omega t+a\sin(\omega t+\theta).$$

约束方程是

$$(x-a\cos\omega t)^2+(y-a\sin\omega t)^2=a^2,$$

其中显含时间 t，所以这是非定常系统。

因为 $V=0$，所以拉格朗日函数 $L=T$，即有

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

$$=\frac{m}{2}a^2\dot{\theta}^2+ma^2\omega(\dot{\theta}+\omega)(1+\cos\theta).$$

函数 $L(\theta,\dot{\theta},t)$ 中，θ 不是循环坐标，所以没有广义动量积分。但是 L 中不显含 t，所以有广义能量积分

$$T_2-T_0=\text{常量},$$

这里的

① 见式(10.52)。

$$T_2=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2,\qquad T_0=ma^2\omega^2(1+\cos\theta)。$$

由此得

$$ma^2\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2-\omega^2(1+\cos\theta)\right]=常量。\ \blacksquare$$

*** 上题中质点的机械能是否守恒？为什么？ ***

从一般意义来说，拉格朗日函数 L 表征着系统固有的动力学性质．对惯性参考系中主动力有势的系统，如果

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,$$

这说明坐标原点在 x 方向的平移（移过一确定的距离）不影响 L 的性质，这就反映了空间在 x 方向的均匀性，而我们已知 $\partial L/\partial x=0$是与 x 方向的动量 p_x 守恒联系着的，所以动量守恒反映了空间的均匀性。同样由

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$$

可导出动量矩守恒 $p_\varphi=$常量，这就是说动量矩守恒反映了空间的各向同性；由

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

可导出(广义)能量 h 守恒，所以我们说(广义)能量守恒反映了时间的均匀性。总之，经典力学中空间时间的三个基本属性——空间的均匀性和各向同性以及时间的均匀性，通过三个基本守恒定理得到反映。

*10-5 位形空间和拉格朗日方程的矩阵形式

如果利用矩阵工具推导并表达拉格朗日方程就能更加紧凑一些。

设决定质点系位形的 n 个向径$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n$,可以用$3n$ 个

坐标$(x_1, x_2, \cdots, x_{3n})$来描述，这$3n$个量的集合组成一个$3n$维空间，叫做质点系的**位形空间**，简称$x$空间。位形空间中任意一点叫做**位形点**，它对应于质点系的一个位形。位形点的坐标就是$(x_1, x_2, \cdots, x_{3n})$，它用一个列矩阵来表示，记作

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_{3n}]^T.$$

质点系的运动规律(位置及形状随时间的变化规律)由

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, \cdots, 3n)$$

描述，或记作列矩阵形式

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t).$$

它对应位形空间中的一条曲线(质点系的位形轨迹)。

对于受约束的质点系，这$3n$个量是不独立的。设有k个约束，其方程是

$$f_j(x_1, \cdots, x_{3n}; t) = 0 \quad (j = 1, \cdots, k).$$

或写成列矩阵形式

$$\mathbf{f}(x, t) = 0,$$

其中$\mathbf{f}$是一个k行的列矩阵，即

$$\mathbf{f} = [f_1, \cdots, f_k]^T.$$

每一个约束方程$f_j = 0$表示在某一时刻t，位形点必须位于一个$3n-1$维的子空间内或超曲面上(在$n=1$的特殊情况中，它是通常的3维空间中的曲面)，那么每一个显含t的约束方程可以理解为一个活动着的(位置、形状都随时间变化的)超曲面。位形点应该位于这k个超曲面的交集子空间(好象两个曲面交成一条曲线那样)中，这个交集是s维的，$s = 3n - k$就是质点系的自由度数。当我们采用广义坐标$(q_1, \cdots, q_s)$来描述这个系统的位形时，则质点系的位形及其变化规律完全可以由一个s行的列矩阵$\mathbf{q}(t)$决定，即

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t), \cdots, q_s(t)]^T.$$

s个广义坐标组成一个s维位形空间，简称q空间。这就是说受约束质点系的位形对应于q空间中的一个点。x空间($3n$维)

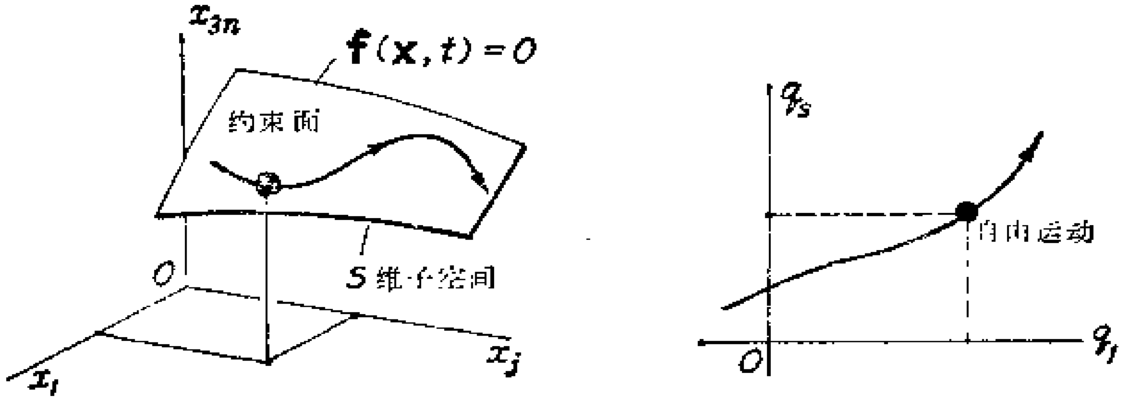
或 q 空间(s 维)都是位形空间，它们对应点的坐标之间的变换关系为

$$x_j = x_j(q_1, \cdots, q_s; t) \quad (j=1, \cdots, 3n).$$

或写成列矩阵

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(q, t). \tag{10.62}$$

这两个位形空间之间有很大的差别，在 x 空间中位形点的运动是受约束的，而在 q 空间中，因为各个坐标 q_j 是彼此独立的，所以对应的位形点的运动是自由的。



(a) x 空间($3n$ 维)　　　　(b) q 空间(s 维)

图10.26　高维位形空间示意图

图10.26是一张示意图，(a) 表示 x 空间，(b) 表示 q 空间。因为高维空间以及超曲面不可能在二维纸上画出，所以图中所画的只是 $n=1$ 及 $k=1$ 的特殊情况。

变换关系式(10.62)一般说来是 x_i 和 q_i 之间的非线性关系式，但是它们的微分（或变分）却具有线性关系。

对每一个坐标 x_i 求时间 t 的全导数，得

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (i=1, 2, \cdots, 3n).$$

写成矩阵形式为

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial x_{3n}}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{3n}}{\partial q_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{3n} \end{bmatrix},
$$

或写成

$$
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}. \tag{10.63}
$$

我们定义一个列矩阵 $\mathbf{x}$ 对另一个列矩阵 $\mathbf{q}$ 的导数为下列矩阵①

$$
\left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\right]_{3n\times s} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_{3n}}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{3n}}{\partial q_s} \end{bmatrix} = \mathbf{P},
$$

下标表示矩阵的行数与列数，实际上它就是式(10.62)的雅可比矩阵。式(10.63)可以用类似于多元函数求导的方法直接由式(10.62)算出

$$
\dot{\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\right]\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}.
$$

同理，虚位移的关系式为

$$
\delta\mathbf{x} = \mathbf{P}\delta\mathbf{q}. \tag{10.64}
$$

将各质点所受的主动力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 的各分量依次写

$$
(F_1, F_2, F_3), (F_4, F_5, F_6), \cdots, (F_{3n-2}, F_{3n-1}, F_{3n}),
$$

也用一个列矩阵 $\mathbf{F}$ 表示，即

$$
\mathbf{F} = [F_1, F_2, \cdots, F_{3n}]^T.
$$

---

① 假设有两个列矩阵

$\mathbf{a} = [a_{ij}]_{m\times 1} = [a_1, \cdots, a_m]^T$，$\mathbf{b} = [b_{ij}]_{n\times 1} = [b_1, \cdots, b_n]^T$，

可以定义 $\mathbf{a}$ 对 $\mathbf{b}$ 的导数为一个 $m\times n$ 阶矩阵，其 i 行 j 列元素为 $\partial a_i/\partial b_j$。于是一个数量对列矩阵的导数是一个行矩阵，一个列矩阵对一个数量的导数仍是一个列矩阵。

于是动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

可以写成矩阵形式

$$(\mathbf{F}-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}})^T\delta\mathbf{x}=0, \tag{10.65}$$

其中质量矩阵 $\mathbf{M}$是一个$3n\times 3n$阶对角矩阵，形式如下：

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & m_1 & 0 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & m_1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & m_n & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & 0 & m_n & 0 \\ & & & & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}.$$

将(10.64)代入(10.65)得

$$(\mathbf{P}^T\mathbf{F}-\mathbf{P}^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}})^T\delta\mathbf{q}=0.$$

令$\mathbf{Q}=\mathbf{P}^T\mathbf{F}$，这个 s 维列矩阵的各个元素就是广义力。由于 s 维列矩阵 $\delta\mathbf{q}$ 的各元素都是彼此独立的，所以上式中圆括弧内的矩阵式应等于零，即

$$\mathbf{P}^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}=\mathbf{Q}. \tag{10.66}$$

根据列矩阵对列矩阵求导，以前证明过的等式(10.41)和(10.42)可以写成矩阵形式①

$$\left[\frac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right]=\mathbf{P},\qquad \left[\frac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{q}}\right]=\dot{\mathbf{P}}. \tag{10.67}$$

---

① 形式上它们可以从

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}+\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x}$$

对 $\dot{\mathbf{q}}$ 和 $\mathbf{q}$ 直接求导推出。但是推演中要对 $\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{q}$ 补充合适的定义，它不是"平面上"有行有列的矩阵，而是"立体的"有行有列还有层的立方阵。

于是就有

$$\mathbf{P}^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}=\frac{d}{dt}(\mathbf{P}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}})-\dot{\mathbf{P}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\left[\frac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right]^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}\right)-\left[\frac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{q}}\right]^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}. \qquad (10.68)$$

动能的矩阵表示式为

$$T=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}},$$

它对列矩阵 $\dot{\mathbf{q}}$ 及 $\mathbf{q}$ 的导数分别都是行矩阵，再取其转置就是列矩阵，它们满足关系式

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right)^T=\left[\dfrac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right]^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}},\\[2ex] \left(\dfrac{\partial T}{\partial\mathbf{q}}\right)^T=\left[\dfrac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{q}}\right]^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}.\end{cases} \qquad (10.69)$$

为了证明这两个等式，只需检查等号两端相应的元素是否相等①。

将式(10.69)代入式(10.68)得

$$[\mathbf{P}^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}]^T=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\mathbf{q}}.$$

再代入(10.66)，得到以矩阵形式表示的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\mathbf{q}}=\mathbf{Q}^T. \qquad (10.70)$$

---

① 如果 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 是三个列矩阵，$\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的行数相同，则容易证明关系式

$$\frac{\partial(\mathbf{a}^T\mathbf{b})}{\partial\mathbf{c}}=\mathbf{a}^T\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\mathbf{c}}+\mathbf{b}^T\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{c}}.$$

把动能表达式写成

$$T=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T(\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}})=\frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{b},$$

则可以利用它来证明式(10.69)，注意其中 $\mathbf{M}$ 是对角形的常量矩阵。

上述方程等号两侧都是 s 维的行矩阵，相应的元素应该相等，所以共有 s 个数量方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \quad (j=1,2,\cdots,s),$$

这就是拉格朗日方程(10.46)。

上面说过，从位形空间（无论是 $3n$ 维的 x 空间还是 s 维的 q 空间）的观点看来，最一般的质点系的运动也无非是一个位形点沿某一轨迹的运动，而式(10.70)给出了位形点的动力学方程。一个质点的一维运动是最简单的运动，它的广义坐标只有一个，相应的 q 空间是一维的。这种最简单运动的动力学方程是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q,$$

注意其中的 q 和 Q 都是标量。由此可见，最一般的动力学方程(10.70)在形式上也不比最简单的动力学方程复杂多少，只不过把标量 q 和 Q 换成了列矩阵 $\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{Q}$ 而已。从这个意义上讲，我们不妨把一个非自由质点系的动力学问题比拟为一个质点（实际上是一个具有质量矩阵的位形点）的问题来讨论，那么单质点在三维空间中运动的有些几何意义可以在 $3n$ 维空间中取得相应的说明。

以 $\mathbf{q}$ 表示的矩阵形式的动力学方程，除了式(10.70)这种拉格朗日形式以外，还可以写成显式如下：将速度表达式(10.63)对 t 再求一次导数，得

$$\ddot{\mathbf{x}}=\mathbf{P}\ddot{\mathbf{q}}+\left[\dot{\mathbf{P}}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)\right]\dot{\mathbf{q}}+\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}.$$

代入式(10.66)得

$$\mathbf{P}^T\mathbf{M}\mathbf{P}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{P}^T\mathbf{M}\left[\dot{\mathbf{P}}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)\right]\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{P}^T\mathbf{M}\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}=\mathbf{Q}. \quad (10.71)$$

显然此式是与上节中式(10.54)相当的。

对于定常约束系统，因为

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}=0,$$

式(10.71)成为

$$\mathbf{P}^T\mathbf{M}\,\mathbf{P}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{P}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{P}}\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{Q}.$$

作为特例，考虑一个自由质点，并取正交的曲线坐标系(q_1,q_2,q_3)，则上式成为

$$m(\mathbf{H}^2\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{q}})=\mathbf{Q},$$

其中m是质点的质量；$\mathbf{H}^2=\mathbf{P}^T\mathbf{P}$是拉梅系数矩阵的平方；$\mathbf{\Omega}=\mathbf{P}^T\dot{\mathbf{P}}$是基向量标架的角速度矩阵；而广义力$\mathbf{Q}$与力$\mathbf{F}$的关系是$\mathbf{Q}=\mathbf{P}^T\mathbf{F}$。这就是自由质点在正交曲线坐标中的动力学方程。

至此我们可以略为总结一下，方程(10.70)或(10.71)把各种已经讨论过的动力学问题统一起来了。它们包含了一般的质点系、刚体和单个质点的情况；也包含了受约束(理想、几何约束)的情况和不受约束的情况；同时它们也包含了直角坐标以及一般的曲线坐标。

例10.20 用矩阵方法写出例10.19(图10.25)中质点的运动微分方程。

解 取θ为广义坐标，根据关系式

$$x=a\cos\omega t+a\cos(\omega t+\theta),$$
$$y=a\sin\omega t+a\sin(\omega t+\theta),$$

算得

$$\mathbf{P}=\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a\sin(\omega t+\theta)\\a\cos(\omega t+\theta)\end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\omega a\begin{bmatrix}-\sin\omega t-\sin(\omega t+\theta)\\\cos\omega t+\cos(\omega t+\theta)\end{bmatrix}=\omega\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\omega^2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}^T\mathbf{P} = a^2,$$

$$\mathbf{P}^T\left(\dot{\mathbf{P}} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 0,$$

$$\mathbf{P}^T\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \omega^2 a^2 \sin\theta.$$

代入式(10.71)并化简，最后得

$$\ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0. \quad \blacksquare$$

10-6 例子

下面是几个不同类型的例题，说明拉格朗日方程的应用。

例10.21 椭圆摆。质量为 m_1 的滑块可以沿水平轴 x 自由滑动；质量为 m_2 的小球用长为 l 的轻杆与滑块相连，连杆可以在竖直平面内自由转动(图10.27)。列出系统的动力学方程；当 $t=0$ 时，$\varphi=\alpha$，$\dot{\varphi}=0$，$\dot{x}=0$，求运动规律。

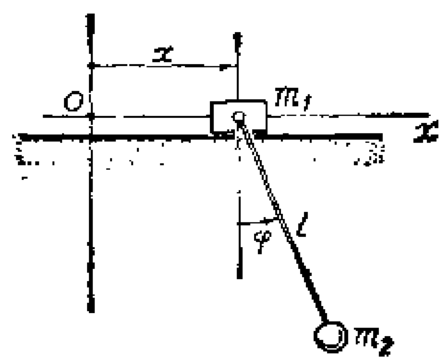


图10.27 椭圆摆

解 质点系的位形可以由滑块的位置坐标 x 和连杆的转角 φ 确定，取 x 和 φ 为系统的广义坐标。主动力是两个质点所受的重力 m_1g 和 m_2g，方向竖直向下，势能为

$$V = -m_2 g l\cos\varphi.$$

相应的广义力为

$$Q_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

$$Q_\varphi=-\frac{\partial V}{\partial \varphi}=-m_2 g l\sin\varphi.$$

动能T的表达式是

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2+m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

代入拉格朗日方程(10.46)得

$$(m_1+m_2)\ddot{x}+m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi-m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi=0, \qquad (1)$$

$$m_2 l^2\ddot{\varphi}+m_2 l\ddot{x}\cos\varphi+m_2 g l\sin\varphi=0. \qquad (2)$$

式(1)和(2)是所求动力学方程。从它们出发求解较繁。下面考虑首次积分。

拉格朗日函数的表达式为

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2$$
$$+m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi+m_2 g l\cos\varphi,$$

其中不显含x，即x是循环坐标，故可得一个广义动量积分，利用初条件后有

$$(m_1+m_2)\dot{x}+m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi=0. \qquad (3)$$

因为L不显含t，所以存在广义能量积分，又因为约束是定常的，所以广义能量就是$T+V$，于是有机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2+m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$-m_2 g l\cos\varphi=E(\text{总能量}). \qquad (4)$$

由初始条件可得$E=-m_2 g l\cos\alpha$。由式(3)和(4)消去$\dot{x}$，得

$$(m_1+m_2\sin^2\varphi)l\dot{\varphi}^2=2(m_1+m_2)g(\cos\varphi-\cos\alpha). \qquad (5)$$

因为初始时$\varphi=\alpha$，$\dot{\varphi}=0$，所以此时$\ddot{\varphi}<0$，由上式得

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}}\,t=-\int_{\alpha}^{\varphi}\sqrt{\frac{1+(m_2/m_1)\sin^2\xi}{2(\cos\xi-\cos\alpha)}}\,d\xi.$$

当 $m_1 \gg m_2$ 时，上式就成为单摆的情形(见例4.18)。

如果最大摆角 α 不大，可视作小量，将式(5)保留到 α 的二阶小量，则得

$$m_1 l\dot{\varphi}^2=(m_1+m_2)g(\alpha^2-\varphi^2).$$

利用初条件后上式积分成为

$$\varphi=\alpha\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1}}\,t\right). \tag{6}$$

可见椭圆摆的频率高于相应的单摆的频率。

由式(3)求一次积分，得

$$(m_1+m_2)x+m_2 l\sin\varphi=c,$$

其中 c 为常量，由初条件确定。将式(6)代入就可以求出 $x(t)$。显然小球 m_2 的运动轨迹是一椭圆，椭圆摆由此而得名。 ▌

例10.22 曲柄连杆机构(图10.28)中参与运动的部件包括：1)活塞，2)连杆，3)曲柄及飞轮。已知活塞质量 m_1，截面积 S，气缸压力 p；连杆质量 m_2，它对活塞销 A 的转动惯量为 J_2，杆长

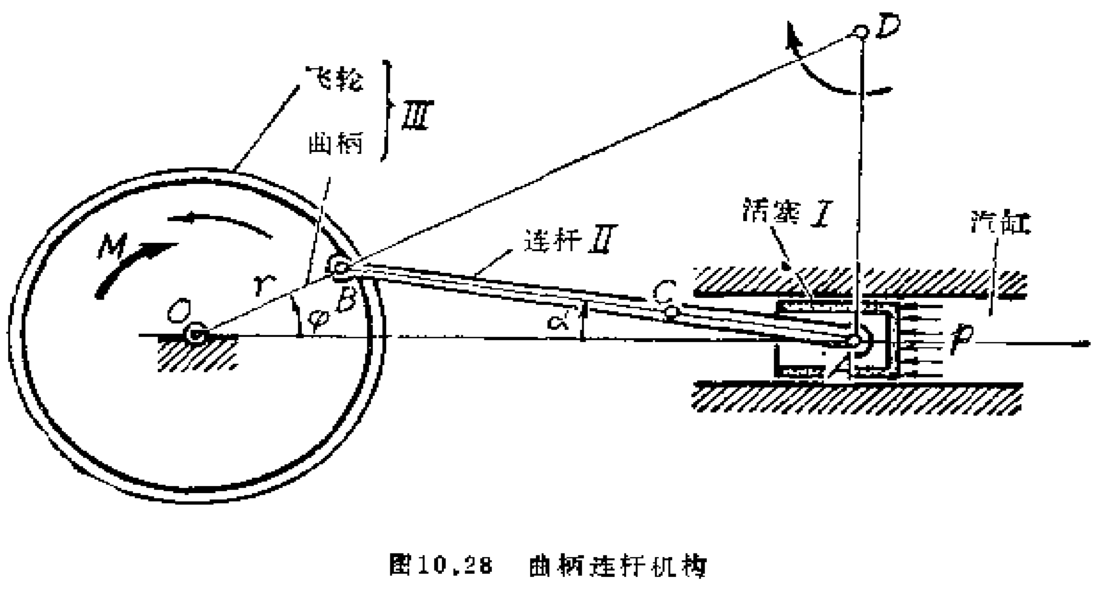


图10.28 曲柄连杆机构

$AB=l$，重心在 C 点，$AC=a$，连杆的偏角 $\alpha=\angle BAO$ 很小，即 $|\alpha|\ll 1$；飞轮及曲柄的转动惯量为 J_3，它受到的阻力矩为 M，曲柄长 $OB=r$。销及汽缸的接触面都是光滑的。以飞轮转角 φ 为变量，不计重力影响，列出系统的动力学方程。

解 这是一个具有代表性的工程问题的实例。这里所有参与运动的部件组成的质点系只有一个自由度，有不少机械系统与此类似，看来复杂，实际上自由度并不多。

以飞轮转角 φ 为广义坐标，则 B 点的速度是 $r\dot{\varphi}$，利用 AB 连杆的瞬心 D，并考虑到

$$|\alpha|\ll 1,\quad DB\approx\frac{l}{\cos\varphi},$$

可求出连杆的角速度是

$$\omega_2=\frac{r\dot{\varphi}\cos\varphi}{l}.$$

活塞的速度为

$$v_1=v_A=r\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

系统的总动能是三部分之和，它们是

活塞的动能 $\quad T_1=\frac{1}{2}m_1r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi,$

连杆的动能 $\quad T_2=\frac{1}{2}\frac{(J_2\cos^2\varphi+m_2l^2\sin^2\varphi)r^2\dot{\varphi}^2}{l^2},$

飞轮的动能 $\quad T_3=\frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}^2.$

算出广义力为

$$Q_\varphi=-M+pSr\sin\varphi.$$

代入拉格朗日方程(10.46)，得系统的动力学方程为

$$\left[J_3+r^2(m_1+m_2)\sin^2\varphi+\frac{J_2r^2\cos^2\varphi}{l^2}\right]\ddot{\varphi}$$

$$+\left[r^2(m_1+m_2)-\frac{J_2r^2}{l^2}\right]\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$=pSr\sin\varphi-M_\bullet$$ ▌

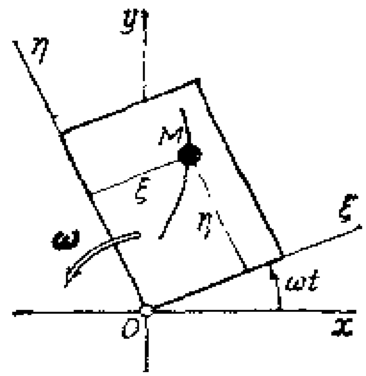


图10.29 转动平面上的点

例10.23 质点相对转动平面的运动。设有一质点M在一光滑平面（取作$O\xi\eta$平面）上运动(图10.29)，而此平面又绕过O点的垂直轴作匀速转动，转动角速度为ω。质点的质量为m，它受到的力有势（势能决定于质点在转动平面中的位置）。列出质点相对转动平面的运动微分方程，并求首次积分。

解 在惯性参考系中取平面坐标架Oxy(图10.29)，则质点在此标架中的坐标是

$$x=\xi\cos\omega t-\eta\sin\omega t,$$
$$y=\xi\sin\omega t+\eta\cos\omega t,$$

其中(ξ,η)是质点在动标架中的坐标。速度分量是

$$\dot{x}=\dot{\xi}\cos\omega t-\dot{\eta}\sin\omega t-\xi\omega\sin\omega t-\eta\omega\cos\omega t,$$
$$\dot{y}=\dot{\xi}\sin\omega t+\dot{\eta}\cos\omega t+\xi\omega\cos\omega t-\eta\omega\sin\omega t.$$

把ξ,η看成是广义坐标，所以动能T通过广义坐标的表达式是

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

$$=\frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+2\omega\xi\dot{\eta}-2\omega\dot{\xi}\eta+\omega^2\xi^2+\omega^2\eta^2).$$

这里T中出现了三项：

$$T_2=\frac{m}{2}(\dot{\xi}^2+\eta^2),$$

$$T_1=m\omega(\xi\dot{\eta}-\dot{\xi}\eta),$$

$$T_0=\frac{m}{2}\omega^2(\xi^2+\eta^2).$$

这说明当我们把 ξ,η 选作广义坐标时，已经把质点的运动当作一种非定常约束情况来看待（实际上质点在平面内并未受到约束力的作用）。

拉格朗日函数是

$$L=T_2+T_1+T_0-V(\xi,\eta),$$

其中$V(\xi,\eta)$是势能函数。

代入拉格朗日方程(10.48)，经整理后得

$$m\ddot{\xi}-2m\omega\dot{\eta}-m\omega^2\xi=-\frac{\partial V}{\partial\xi},$$

$$m\ddot{\eta}+2m\omega\dot{\xi}-m\omega^2\eta=-\frac{\partial V}{\partial\eta}.$$

值得注意的是这里的速度线性项 $(-2m\omega\dot{\eta})$ 和$(+2m\omega\dot{\xi})$的系数是反对称的，它们是式(10.54)中陀螺项的一个简单实例。

在非惯性系中解释上述方程时，可将方程写成

$$m\ddot{\xi}=2m\omega\dot{\eta}+m\omega^2\xi-\frac{\partial V}{\partial\xi},$$

$$m\ddot{\eta}=-2m\omega\dot{\xi}+m\omega^2\eta-\frac{\partial V}{\partial\eta}.$$

于是 $m\omega^2\xi$ 和 $m\omega^2\eta$ 两项是离心惯性力的分量，$2m\omega\dot{\eta}$ 和 $-2m\omega\dot{\xi}$ 两项是科氏惯性力的分量。可见所谓陀螺项是和科氏力有关的项。所有陀螺项对应的力所作功的总和等于零①，这是因为

$$dw=2m\omega\dot{\eta}\,d\xi-2m\omega\dot{\xi}\,d\eta=2m\omega(\dot{\eta}\dot{\xi}-\dot{\xi}\dot{\eta})dt=0.$$

所以在动参考系中应该有

动能＋离心力势能＋外力势能＝常量。

---

① 这一结论对式(10.54)中一般形式的陀螺项也适用。

这一结果也可以从广义能量积分得出。因为L不显含t，所以有广义能量守恒，即

$$T_2-T_0+V=h(\text{常量}),$$

或

$$\frac{m}{2}(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)-\frac{m}{2}\omega^2(\xi^2+\eta^2)+V(\xi,\eta)=h,$$

其中第二项就是离心力势能。▌

例10.24 铁丝弯成抛物线$\rho^2=2az$(z轴向上)形状的框架$AOBA$，它可绕竖直轴Oz转动，转动惯量是J。$\boldsymbol{M}$是作用在框架上的力偶，力偶向量的方向与Oz轴一致。铁丝上串有一质量为m的小球，它沿铁丝可以自由滑动。对以下两种情况列出系统的运动微分方程，并讨论运动中系统的哪些量守恒(φ是框架绕Oz轴的转角)？

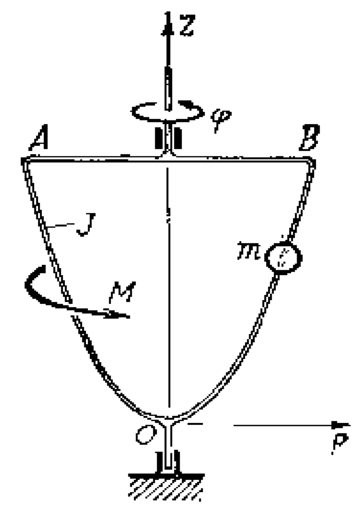


图10.30 哪些量守恒？

(1)设力矩M是φ的已知函数，即$M=M(\varphi)$；

(2)设φ是t的已知函数，即$\varphi=f(t)$。

解 取框架连同小球一起作为质点系。

第一种情况。系统具有两个自由度，可取ρ和φ为广义坐标。因为框架的转角不是一个预先给定的函数，框架对小球的约束方程$\rho^2=2az$又不显含t，因此这是一个定常约束系统。

系统的动能是

$$T=\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2+\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2),$$

由于$z=\rho^2/2a$，得$\dot{z}=\rho\dot{\rho}/a$。代入上式，经整理后得出以广义坐标和广义速度表示的动能

$$T=\frac{1}{2}(J+m\rho^2)\dot{\varphi}^2+\frac{m}{2}\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}^2.$$

势能函数为

$$V(\rho,\varphi)=\frac{mg\rho^2}{2a}-\int_0^{\varphi}M(\alpha)d\alpha.$$

拉格朗日函数 $L=T-V$。代入拉格朗日方程(10.18)，经整理后得运动微分方程为

$$\frac{d}{dt}\left[(J+m\rho^2)\dot{\varphi}\right]=M(\varphi), \tag{1}$$

$$(\rho^2+a^2)\ddot{\rho}+\rho\dot{\rho}^2+\rho a(g-a\dot{\varphi}^2)=0. \tag{2}$$

函数 L 不显含 t，所以广义能量守恒；又因为系统是定常约束系统，广义能量就是机械能。由此得机械能守恒

$$\frac{1}{2}(J+m\rho^2)\dot{\varphi}^2+\frac{m}{2}\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}^2$$

$$+mg\frac{\rho^2}{2a}-\int_0^{\varphi}M(\alpha)d\alpha=\text{常量}.$$

这里函数 L 显含 φ 和 ρ，故广义动量 $\partial L/\partial\dot{\varphi}$ 和 $\partial L/\partial\dot{\rho}$ 都不守恒。

如果框架上力偶矩 $M(\varphi)$ 恒为零，则广义动量 $\partial L/\partial\dot{\varphi}$ 守恒，即质点系绕 Oz 轴的动量矩守恒

$$(J+m\rho^2)\dot{\varphi}=\text{常量}.$$

第二种情况。因为 φ 是时间 t 的已知函数 $f(t)$，系统只有一个自由度，取广义坐标为 ρ。这是一个具有非定常约束的系统。力偶矩 M 是约束力矩，而不是主动力矩。应该注意，在考虑 ρ 的虚位移时，要把时间 t "冻结"起来，所以 φ 不变，M 的虚功为零。

系统动能的表达式为

$$T=\frac{1}{2}(J+m\rho^2)[\dot{f}(t)]^2+\frac{m}{2}\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}^2.$$

系统势能为

$$V=\frac{mg\rho^2}{2a}.$$

所以拉格朗日函数是

$$L=\frac{1}{2}(J+m\rho^2)[\dot{f}(t)]^2+\frac{m}{2}\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}^2-\frac{mg\rho^2}{2a}.$$

代入拉格朗日方程，化简后得

$$(\rho^2+a^2)\ddot{\rho}+\rho\dot{\rho}^2+\rho a(g-a\dot{f}^2)=0. \tag{3}$$

对于一般的转动规律 $\varphi=f(t)$，写不出首次积分。如果转动是匀速的，即

$$\dot{f}(t)=\omega(\text{常量}),$$

那么L中不显含t，广义能量T_2-T_0+V守恒。即

$$-\frac{1}{2}(J+m\rho^2)\omega^2+\frac{m}{2}\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}^2+\frac{mg\rho^2}{2a}=\text{常量}.$$

注意这时 $T+V$ 并不守恒，即

$$+\frac{1}{2}(J+m\rho^2)\omega^2+\frac{m}{2}\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}^2+\frac{mg\rho^2}{2a}\neq\text{常量}.$$

因为外力偶矩M在实位移中的功不是零，而是

$$\int M\dot{f}(t)dt.$$

这个力偶矩M可以利用第一种情况中的方程(1)求得(为什么可以这样做？)

$$M(t)=\frac{d}{dt}[(J+m\rho^2(t))\dot{f}(t)].$$

如果 $\dot{f}(t)=\omega$，则有

$$M(t)=2m\rho(t)\dot{\rho}(t)\cdot\omega,$$

其中 $\rho(t)$ 由方程(3)中解得。除了 ρ 不变化(这是否可能?)以外，必须有外力矩作用才能维持框架的匀速转动。 ▌

例10.25 对称陀螺（拉格朗日情形）已在9-4中讨论过，利用拉格朗日方程列出其运动微分方程，并求首次积分。

解 取欧拉角 ψ,θ,φ 为广义坐标。已知在莱沙尔坐标系中刚体角速度分量为

$$(\dot{\theta},\dot{\psi}\sin\theta,\dot{\psi}\cos\varphi+\dot{\varphi}),$$

势能 $V=mga\cos\theta$，所以拉格朗日函数为

$$L=T-V=\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}J_1\dot{\psi}^2\sin^2\theta$$

$$+\frac{1}{2}J_3(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2-mga\cos\theta.$$

代入拉格朗日方程(10.48)，经计算整理后正好就是方程组(9.31)，这里不再重复，式中的 L_n,L_s 和 L_ξ 分别为 $mga\sin\theta$，0，0。

因为 L 中不显含 φ，所以有广义动量积分

$$\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}=\omega_3\ (\text{常量}).$$

又 L 中不显含 ψ，所以又有广义动量积分

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}=\text{常量},$$

将上式代入这个积分，得

$$J_1\dot{\psi}\sin^2\theta+J_3\omega_3\cos\theta=G_z\ (\text{常量}).$$

另外，L 不显 t，约束又是定常的，故机械能守恒

$$\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}J_1\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}J_3\omega_3^2+mga\cos\theta=E\ (\text{常量}).$$

这些就是式(9.32)，(9.33)和(9.34)$\left(\text{其中 } h=E-\frac{1}{2}J_3\omega_3^2\right)$。 ▌

例10.26 冲击力对质点系的作用。设质点系的广义坐标为 $(q_1,\cdots,q_s)$，在时刻 τ 受到冲击力的作用。又设在广义力中，有

一个广义力是

$$Q_j = I_j \delta(t-\tau),$$

其中 I_j 是广义冲量，δ 是脉冲函数，而其余的广义力 $Q_i (i \neq j)$ 都是常规量。问受冲击后质点系的运动有什么变化？

解 系统的运动微分方程是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s).$$

将上式乘 dt 并从 $t=\tau-0$ 到 $t=\tau+0$ 积分。右端积分的结果是

$$\int_{\tau-0}^{\tau+0} Q_i dt = 0 \quad (i \neq j),$$

$$\int_{\tau-0}^{\tau+0} Q_j dt = I_j \int_{\tau-0}^{\tau+0} \delta(t-\tau) dt = I_j;$$

左端积分的结果是

$$\int_{\tau-0}^{\tau+0}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right] dt = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right]_{\tau-0}^{\tau+0} - 0.$$

因 $\partial T / \partial \dot{q}_i$ 是广义动量 p_i，所以左右两端积分相等的结果可写成为

$$p_i(\tau+0) - p_i(\tau-0) = 0 \quad (i \neq j),$$

$$p_j(\tau+0) - p_j(\tau-0) = I_j.$$

这说明在冲击过程中，只有第 j 个广义动量发生突变，变化大小等于广义冲量，而其余的广义动量保持不变。 ▎

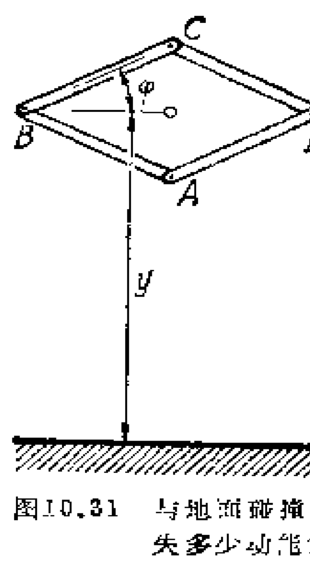


图10.31 与地面碰撞时损失多少动能？

例10.27 设有四根相同的均质杆（质量 m，长 l）用光滑铰链联成一个菱形 $ABCD$。由于重力作用，在竖直平面内从静止状态由高处落下（图10.31）。开始时 AC 沿竖直线，$\angle CBA = 2\alpha$，当 A 点着地碰撞后，A 点的速度突变为零。求证，如 $\alpha = 30°$，则在碰撞过程中动能损失了原有动能的十三分之四。

解 这个刚体系有四个自由度，即描述菱形形状需要一个变量，形状确定以后作为刚体还有三个自由度（因限于在竖直平面内运动）。因为 AC 开始时竖直，根据对称性，它在跌落过程中将保持竖直，所以在这个具体问题中只要考虑两个自由度。取菱形中心高度 y 和菱形 B 处半顶角 φ 为两个广义坐标。

根据寇尼格定理（7-3）可以求出动能，从而求出系统的拉格朗日函数是

$$L=2m\dot{y}^2+\frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2-4mgy.$$

分两个阶段讨论运动。从开始时刻 $t=0$ 到 A 点与地面碰撞时刻 $t=\tau$ 的跌落阶段，运动方程是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0 \quad 或 \quad \ddot{y}=-g,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0 \quad 或 \quad \ddot{\varphi}=0.$$

初条件是 $\varphi(0)=\alpha$，$\dot{\varphi}(0)=0$，所以 φ 的解是 $\varphi(t)=\alpha$。这说明跌落阶段中，菱形形状保持不变。

再考虑碰撞阶段(t 从 $\tau-0$ 到 $\tau+0$)。将碰撞前 A,B,C,D 各点的速度记为 u(图10.32(a))，即为跌落阶段的末速度 $u=g\tau$。设在碰撞过程中，A 点受到的冲量为 $\boldsymbol{I}$，A 点受到的冲击力可用

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}\delta(t-\tau)$$

表示。在计算这个冲击力的广义力时，先令 $\delta y\neq0$，$\delta\varphi=0$（图10.32(b))。则 A 点的虚位移是 δy，冲击力 $\boldsymbol{F}$ 的虚功是 $F\delta y$，所以广义力 Q_y 为

$$Q_y=\boldsymbol{F}=I\delta(t-\tau).$$

再令 $\delta y=0$，$\delta\varphi\neq0$。则 A 点的虚位移是 $l\cos\alpha\delta\varphi$，方向向下，$\boldsymbol{F}$ 的虚功是 $-Fl\cos\alpha\delta\varphi$，所以有

$$Q_\varphi=-Fl\cos\alpha=-Il\cos\alpha\delta(t-\tau).$$

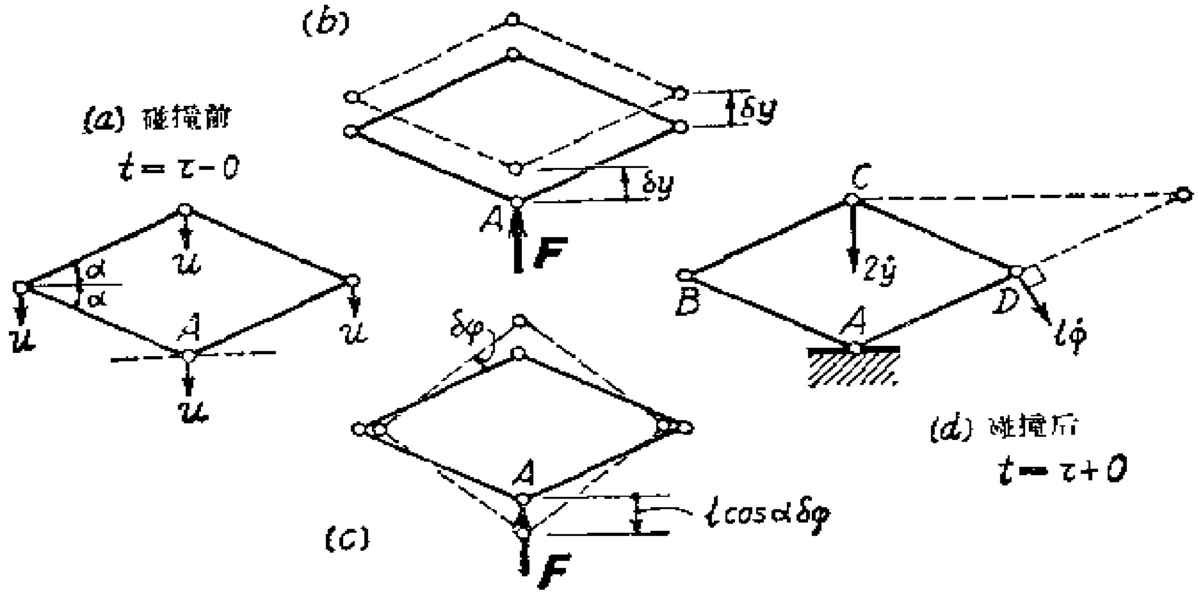


图10.32 广义力的计算和碰撞前后的速度

现在利用例10.26的结果计算广义动量 p_y 和 p_φ 在碰撞过程中的变化。广义动量

$$p_y=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=4m\dot{y},$$

它由原来的 $-4mu$ 变为 $-4mu+I$。

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{4}{3}ml^2\dot{\varphi},$$

它由原来的0变为 $-Il\cos\alpha$。于是

$$\dot{y}(\tau+0)=-u+\frac{I}{4m},$$

$$\dot{\varphi}(\tau+0)=-\frac{3I\cos\alpha}{4ml}.$$

根据运动学关系，A 点的速度为

$$v_A(t)=\dot{y}-l\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

根据题意，它在碰撞后变为零，即 $v_A(\tau+0)=0$。由此得

$$-u+\frac{I}{4m}+\frac{3I\cos^2\alpha}{4m}=0.$$

解出冲量大小为

$$I=\frac{4mu}{1+3\cos^2\alpha}.$$

代回，求得碰撞后的广义速度为

$$\dot{y}(\tau+0)=-\frac{3u\cos^2\alpha}{1+3\cos^2\alpha},$$

$$\dot{\varphi}(\tau+0)=-\frac{3u\cos\alpha}{l(1+3\cos^2\alpha)}.$$

碰撞后各顶点的速度如图10.32(d)所示，它们是碰撞后下一阶段运动的初条件。因为与本题无关，故不必计算。

碰撞前系统动能是

$$T(\tau-0)=2mu^2.$$

碰撞后的动能为

$$T(\tau+0)=2m\dot{y}^2(\tau+0)+\frac{2}{3}ml^2\dot{\varphi}^2(\tau+0)$$

$$=\frac{6mu^2\cos^2\alpha}{1+3\cos^2\alpha}.$$

所以在碰撞过程中，动能损失的比例是

$$\frac{T(\tau-0)-T(\tau+0)}{T(\tau-0)}=\frac{1}{1+3\cos^2\alpha},$$

以 $\alpha=30^\circ$ 代入，可知动能损失了原来的 4/13。 ▌

10-7 稳定平衡位形附近的小振动

可以用拉格朗日方程推导小振动的微分方程。这里所谓小振动是指质点系在它的稳定平衡位形附近的微幅振动。在 4-5 中曾经用能量方法讨论单自由度系统的振动，现在应用拉格朗日方程来推导也从单自由度系统开始，然后再推广到多自由度系统。

设 q 是单自由度定常保守系统的广义坐标，动能为

$$T=\frac{1}{2}m(q)\dot{q}^2,$$

根据式(10.52)可知，其中的 m 表示一个与广义坐标 q 有关的系数，它不一定指质量。又设势能为 $V(q)$。

平衡位形由广义力为零，即

$$\frac{\partial V}{\partial q}=V'(q)=0$$

的根 $q=q_0$ 给出。已经知道，当条件

$$V''(q_0)=k>0$$

被满足时，对应的平衡位形是稳定的。在考虑小振动时，可以认为 $q-q_0$ 和 $\dot{q}$ 都是一阶小量。将 $m(q)$ 在 $q=q_0$ 附近展开，有

$$m(q)=m(q_0)+m'(q_0)(q-q_0)+\cdots,$$

故动能 T 在略去三阶小量时可写成

$$T=\frac{1}{2}m(q_0)\dot{q}^2.$$

同样，势能 $V(q)$ 可展开成为

$$V(q)=V(q_0)+V'(q_0)(q-q_0)+\frac{1}{2}V''(q_0)(q-q_0)^2+\cdots,$$

以 $V'(q_0)=0$ 和 $V''(q_0)=k>0$ 代入，略去三阶小量，得

$$V=V(q_0)+\frac{k}{2}(q-q_0)^2.$$

将 T 和 V 代入拉格朗日方程，得单自由度小振动方程为

$$m(q_0)\ddot{q}+k(q-q_0)=0.$$

由此可见，把 T 和 V 保留到二阶小量等价于对振动方程线性化。在这个线性化模型中，$m(q_0)$ 是广义的惯量（常量），k 或 $V''(q_0)$ 是广义的刚度系数（常量）。小振动的(圆)频率是

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m(q_0)}}=\sqrt{\frac{V''(q_0)}{m(q_0)}}.$$

对于多自由度系统，以上的讨论在原则上可以相应地搬过

来，只要把 q 理解为是一个列矩阵

$$\mathbf{q}=[q_1,\cdots,q_s]^T,$$

其中 s 是系统的自由度。但是，当自由度由一个变为多个时，在稳定性和振动方面也出现了一些新的概念，共中有两点需要特别加以说明。

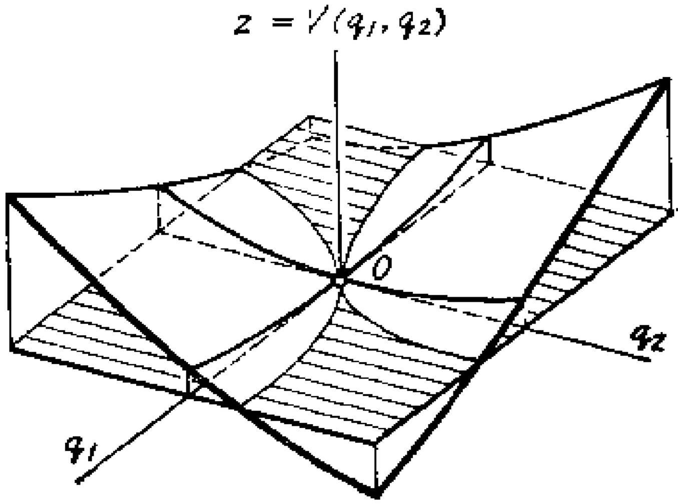


图10.33 $\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}$ 和 $\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}$ 在(0,0)处都大于零，但驻定值 $V(0,0)$ 不是极小值

第一是关于平衡位形稳定性的条件。在单自由度情况中，在平衡位形处 $V''(q_0)>0$ 保证了 $V(q_0)$ 取极小值，即平衡位形 $q=q_0$ 是稳定的。对于多自由度系统来说，即使势能 $V(q_1,\cdots,q_s)$ 在平衡位形处所有二阶偏导数都大于零，也不能保证一定是稳定的。图10.33表示了一个简单的例子。图中 q_1 和 q_2 表示系统的两个广义坐标，$z=V(q_1,q_2)$ 表示系统的势能函数。$q_1=0$，$q_2=0$ 是平衡位形，即

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_1}\right|_{(0,0)}=0, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial q_2}\right|_{(0,0)}=0,$$

且有

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right|_{(0,0)}>0, \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right|_{(0,0)}>0. \tag{10.72}$$

但是 $V(0,0)$ 并不是极小值，平衡位形(0,0)显然是不稳定的。这可以理解为有一个单位质量的小球，放在形状就是 $z=V(q_1,q_2)$ 的光滑曲面上，当小球处于 (0,0,0) 处并稍受扰动时，小球就要远离这一点。

为了保证$V(0,0)$是极小值，式(10.72)只是必要条件，一组充分条件是

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right|_{(0,0)}>0\ \left(或\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right|_{(0,0)}>0\right),\\ \left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\cdot\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)_{(0,0)}-\left(\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_2}\right|_{(0,0)}\right)^2>0.\end{cases}\tag{10.73}$$

在以后的讨论中将假定在所议的平衡位形处势能是极小值，因而平衡位形是稳定的。

第二是关于多自由度系统振型的概念。在单自由度系统中，不论其结构怎样复杂，振动过程为关系式

$$q=A\sin(\omega t+\varphi)$$

所描述，它只有一个固有频率ω。例如7-6中例7.24的系统（图7.28）是单自由度系统（设中间铰链只能上下运动）。它如果振动的话，一定以所求得的那个频率振动，虽然振幅与初条件有关，但振动形式只有一个，如图10.34所示。

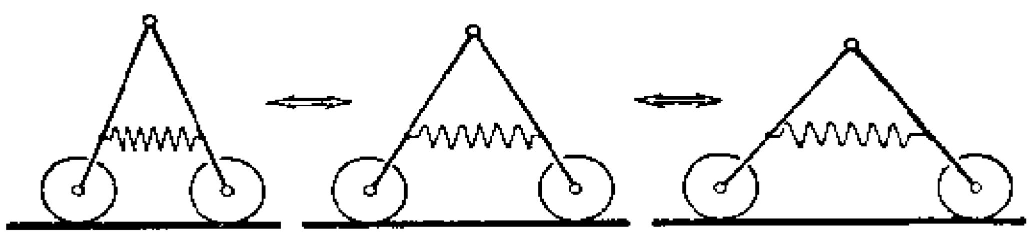


图10.34　单自由度振动系统只有一种振型

多自由度系统的固有频率有好几个。设系统中每个广义坐标以同一固有频率振动并有共同的相位时，各个广义坐标的振幅之间有一确定的比例。这种振动形式我们称为**振型**或**主振型**。所以单自由度系统只有一个振型，而多自由度系统就有好几个振型。图10.35中的耦合摆由同一竖直平面内两个相同的摆用一水平弹簧相连而成，弹簧原长等于两支点间的距离，这是一个两自由度

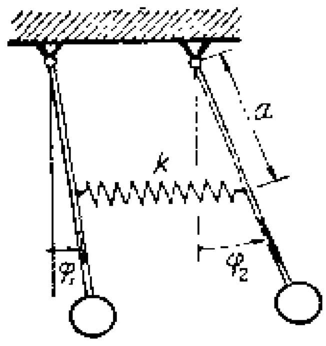


图10.35 耦合摆

的系统。因为两摆完全相同，只要给适当的初条件，总可以使两个摆完全同步，即 $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$。在这种情况下弹簧就一直不受拉伸或压缩，摆动的频率和单独一个摆的频率相同。这是一种振型，如图 10.36 中第一行所示。另外，从左右对称性考虑只要两摆的初条件左右对称，系统就作对称的振动，在任何时刻 $\varphi_1(t)=-\varphi_2(t)$。在这种情况中，弹簧时紧时松，这是第二种振型，如图 10.36 中第二行所示。和第一种振型比较，单个摆的惯性还是一样，但

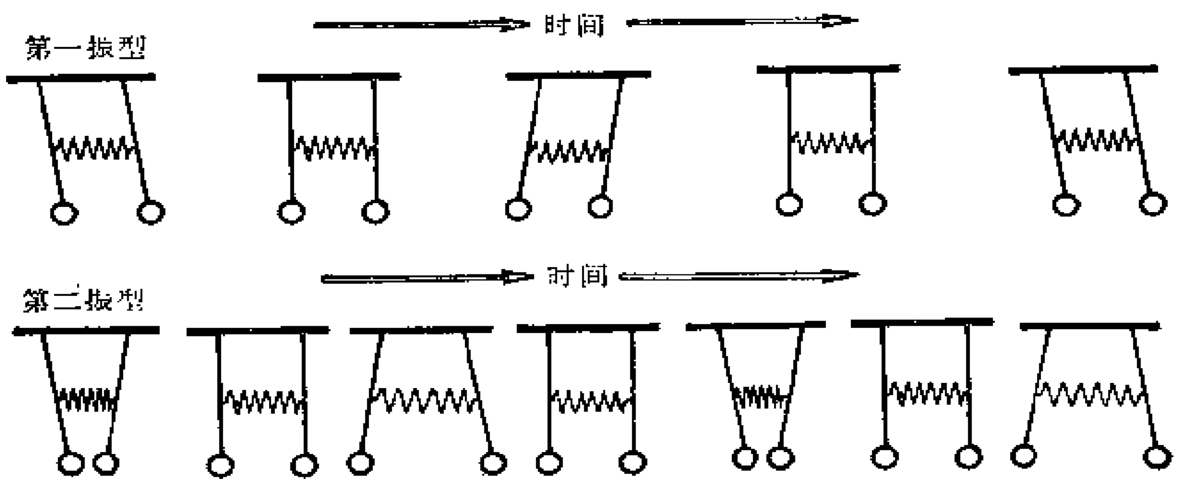


图10.36 耦合摆的两个振型

弹簧在起作用，所以刚度增加了，此时振动的频率一定要比第一种振型的频率高。这样，即使沒有求解运动微分方程，我们也定性地分析出这个系统至少有两种不同的振型。相对于每一个振型，有不同的固有频率。当然，如果初条件给得既不同步又不左右对称，运动的情况就要具体计算才能分析清楚。

有了以上两点说明以后，我们进而讨论一般的情况。

设有一个定常的主动力有势的质点系，广义坐标为 $q_1,\cdots,$

q_s。动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

其中 m_{ij} 一般说是广义坐标的函数。

系统势能为 $V=V(q_1,\cdots,q_s)$。能使所有广义力 Q_i 同时等于零，即

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,s)$$

的解 $q_{10},\cdots,q_{s0}$ 对应于系统的平衡位形。为了简单起见，以后我们适当选取广义坐标的零点使得平衡位形刚好对应于

$$(q_{10},\cdots,q_{s0})=(0,\cdots,0).$$

把平衡位形处的势能值记作 $V_0=V(0,\cdots,0)$。又设 V_0 是 V 的一个极小值，即平衡位形$(0,\cdots,0)$是稳定的。我们考虑的是小振动，所以假设 q_i 及 $\dot{q}_i$ 是小量。

将 m_{ij} 和 V 在平衡点$(0,\cdots,0)$附近展成幂级数，代入T和V的表达式中，并保留到二阶小量，可得

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}m_{ij}^{0}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

$$V=V_0+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}k_{ij}q_iq_j,$$

其中 m_{ij}^0 和 k_{ij} 都是常量，即

$$m_{ij}^0=m_{ij}(0,\cdots,0),$$

$$k_{ij}=\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right|_{(0,\cdots,0)}$$

代入拉格朗日方程，可得出 s 个二阶微分方程

$$\sum_{j=1}^{s}(m_{ij}^0\ddot{q}_j+k_{ij}q_j)=0\quad(i=1,\cdots,s).\qquad(10.74)$$

为了简单起见，以后 m_{ij}^0 的上角标"0"略去不记，但必须记住它与真正的 m_{ij} 的区别。

上式可以写成矩阵形式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=0, \tag{10.75}$$

其中 $\mathbf{q}$ 是广义坐标列矩阵 $[q_1,\cdots,q_s]^T$，$\mathbf{M}$ 叫做**惯量矩阵**，$\mathbf{K}$ 叫做**刚度矩阵**，它们分别是

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{s1} & \cdots & m_{ss} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{s1} & \cdots & k_{ss} \end{bmatrix}.$$

由 m_{ij} 和 k_{ij} 的定义推知，这两个矩阵都是对称矩阵。方程(10.75)与单自由度振动的方程 $m\ddot{q}+kq=0$ 在形式上完全一致。

式(10.74)或(10.75)的解的情况比较复杂。作为最简单的情况，我们可以假定每一个广义坐标都是以相同的频率和相位作简谐振动，即

$$q_i(t)=A_i\sin(\omega t+\varphi) \quad (i=1,\cdots,s).$$

代入式(10.74)得

$$\sum_{j=1}^{s}(k_{ij}-\omega^2 m_{ij})A_j=0 \quad (i=1,\cdots,s). \tag{10.76}$$

这是关于 $A_1,\cdots,A_s$ 的 s 元线性齐次代数方程组，我们关心它是否有非平凡解，因为平凡解 $A_1=0,\cdots,A_s=0$ 对应于 $q_1(t)\equiv 0$，$\cdots,q_s(t)\equiv 0$，它就是平衡位形。式(10.76)有非平凡解的条件是系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} k_{11}-\omega^2 m_{11} & \cdots & k_{1s}-\omega^2 m_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{s1}-\omega^2 m_{s1} & \cdots & k_{ss}-\omega^2 m_{ss} \end{vmatrix}=0, \tag{10.77}$$

或简写为

$$\det(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})=0.$$

这是以 ω^2 为未知量的 s 次代数方程，叫做**特征方程**或**频率方程**，它与单自由度系统中频率方程

$$k-\omega^2 m=0 \quad 或 \quad \omega^2=k/m$$

相当。

有关频率方程的解的详细讨论已超出本书的范围，下面我们只指出有关的结果，详细的论证可见振动理论的专著。

如果平衡位形是稳定的，则刚度矩阵 **K** 是正定的；同时由于动能是非负量，所以惯量矩阵 **M** 也是正定的。在代数中已证明，当 **K** 和 **M** 都是正定的矩阵时，特征方程(10.77)有 s 个正根（在临界情况中，当平衡位形带有中性平衡的成分时，则刚度矩阵 **K** 可能是常正的，这时有的根可能为零）。对这 s 个非负的根开方（取非负值），得 s 个不同的值 $\omega^{(1)},\omega^{(2)},\cdots,\omega^{(s)}$，它们称为系统的**固有频率**①。对于每一个固有频率 $\omega^{(k)}$，式(10.76)成为

$$\sum_{j=1}^{s}\{k_{ij}-[\omega^{(k)}]^2 m_{ij}\}A_j=0 \quad (i=1,\cdots,s)。\tag{10.78}$$

由此解出与 $\omega^{(k)}$ 对应的非零解

$$A_1^{(k)},\cdots,A_s^{(k)}。\tag{10.79}$$

它对应于一组小振动的特解

$$q_i^{(k)}(t)=A_i^{(k)}\sin(\omega^{(k)}t+\varphi^{(k)}) \quad (i=1,\cdots,s)。\tag{10.80}$$

实际上，任取一个常量 $c^{(k)}$，则

$$c^{(k)}A_1^{(k)},\cdots,c^{(k)}A_s^{(k)}$$

与式(10.79)一样也是方程(10.78)的解。所以式(10.79)确定了一组比例值。这组比例值相当于一个与频率 $\omega^{(k)}$ 对应的振型，故方程(10.78)称为**振型方程**。式(10.80)称为与频率 $\omega^{(k)}$ 对应的**主振动**。将 $\omega^{(1)},\cdots,\omega^{(s)}$ 由小到大排列，则分别称为第一固有频率，…，第 s 固有频率；相应的特解 $q_i^{(k)}(t)$ 称为第一主振动，…，第 s 主振动。

---

① 我们假定频率方程(10.77)无重根。如果有重根应另外作专题的讨论，此处从略。

在一般的条件下方程(10.74)的通解是各个主振动的叠加，即

$$q_i(t)=\sum_{k=1}^{s}c^{(k)}q_i^{(k)}=\sum_{k=1}^{s}c^{(k)}A_i^{(k)}\sin(\omega^{(k)}t+\varphi^{(k)})\quad(i=1,\cdots,s).$$

其中共有 $2s$ 个积分常数：$c^{(1)},\cdots,c^{(s)}$ 和 $\varphi^{(1)},\cdots,\varphi^{(s)}$，它们由 s 个初坐标 $q_i(0)$ 和 s 个初速度 $\dot{q}_i(0)$ 确定。如果初条件给得很特殊，那么系统的运动也可能按某一个主振动进行，此时系统各点都作同一频率同一相位的振动。

例10.28 耦合摆(图10.35)。两个摆相同，单个摆绕支点的转动惯量是 J，质量是 m，质心离支点的距离是 l，弹簧挂点离支点的距离是 a，弹簧刚度为 k，在平衡位置处弹簧无伸缩。求主振动和一般解。

解 取转角 φ_1 和 φ_2 为广义坐标，$\varphi_1=0,\varphi_2=0$ 是稳定平衡状态。动能为

$$T=\frac{1}{2}J\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}J\dot{\varphi}_2^2,$$

势能为

$$V=\frac{1}{2}k[a(\varphi_1-\varphi_2)]^2-mgl(1-\cos\varphi_1)-mgl(1-\cos\varphi_2),$$

略去三阶以上小量，得

$$V=\frac{1}{2}ka^2(\varphi_1^2-2\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2)+\frac{1}{2}mgl(\varphi_1^2+\varphi_2^2).$$

惯量矩阵是

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}J & 0\\ 0 & J\end{bmatrix}.$$

刚度矩阵是

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}ka^2+mgl & -ka^2\\ -ka^2 & ka^2+mgl\end{bmatrix}.$$

频率方程是

$$\begin{vmatrix}ka^2+mgl-J\omega^2 & -ka^2\\ -ka^2 & ka^2+mgl-J\omega^2\end{vmatrix}=0,$$

由此解出两个固有频率为

$$\omega^{(1)}=\sqrt{\frac{mgl}{J}} \qquad \omega^{(2)}=\sqrt{\frac{2ka^2+mgl}{J}}.$$

对于第一固有频率 $\omega=\omega^{(1)}$，相应的振型方程是

$$ka^2A_1^{(1)}-ka^2A_2^{(1)}=0,$$

得出第一振型的解为 $A_1^{(1)}:A_2^{(1)}=1:1$。于是得第一主振动为

$$\varphi_1^{(1)}(t)=\varphi_2^{(1)}(t)=c^{(1)}\sin\left(\sqrt{\frac{mgl}{J}}\,t+\theta^{(1)}\right).$$

这个解与弹簧刚度系数无关，这是因为两个摆同步，弹簧沒有伸缩，这与以前的定性讨论一致。

对于第二固有频率 $\omega=\omega^{(2)}$，对应的振型方程是

$$-ka^2A_1^{(2)}-ka^2A_2^{(2)}=0,$$

得出第二振型的解为 $A_1^{(2)}:A_2^{(2)}=1:(-1)$。于是得第二主振动为

$$\varphi_1^{(2)}(t)=-\varphi_2^{(2)}(t)=c^{(2)}\sin\left(\sqrt{\frac{2ka^2+mgl}{J}}\,t+\theta^{(2)}\right).$$

以上是两个主振动，只有在特定的初条件时才能形成(图10.36)。在任意初条件下的一般解是

$$\varphi_1(t)=c^{(1)}\sin\left(\sqrt{\frac{mgl}{J}}\cdot t+\theta^{(1)}\right)+c^{(2)}\sin\left(\sqrt{\frac{2ka^2+mgl}{l}}\cdot t+\theta^{(2)}\right),$$

$$\varphi_2(t)=c^{(1)}\sin\left(\sqrt{\frac{mgl}{J}}\cdot t+\theta^{(1)}\right)-c^{(2)}\sin\left(\sqrt{\frac{2ka^2+mgl}{J}}\cdot t+\theta^{(2)}\right),$$

其中四个积分常数 $c^{(1)},c^{(2)},\theta^{(1)},\theta^{(2)}$ 由初条件确定。当初条件是

$$\varphi_1(0)=a, \quad \dot{\varphi}_1(0)=0, \quad \varphi_2(0)=0, \quad \dot{\varphi}_2(0)=0$$

时，所得的 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 如图10.37所示。▌

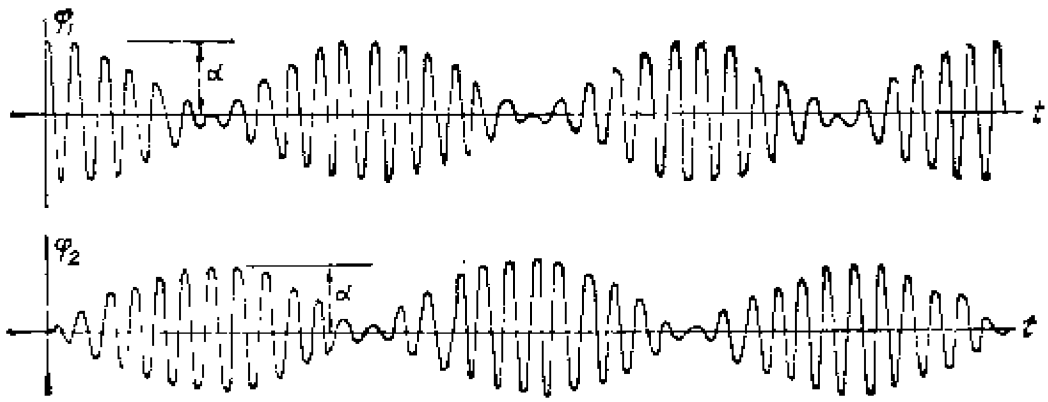


图10.37　耦合摆振动的一个特解

例10.29　再解例 10.28 中耦合摆的振动，取广义坐标 q_1, q_2 为

$$q_1=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2),\quad q_2=\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2).$$

解　先看一下 q_1 和 q_2 有什么意义。q_1 表示弹簧中点的角位移，而 q_2 反映了弹簧变形的大小。即 $q_1\neq 0$，$q_2=0$ 表示弹簧无变形，这正好对应前面的第一振型；当 $q_1=0$，$q_2\neq 0$ 时，弹簧中点不动，它对应于第二振型。因此使用这种广义坐标能更简洁地反映出两种振型的特征。

使用广义坐标 q_1 和 q_2 后，动能和势能准确到二阶小量的表达式为

$$T=J(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),$$
$$V=mglq_1^2+(2ka^2+mgl)q_2^2.$$

于是惯量矩阵和刚度矩阵是

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}2J & 0\\ 0 & 2J\end{bmatrix},\qquad \mathbf{K}=\begin{bmatrix}2mgl & 0\\ 0 & 4ka^2+2mgl\end{bmatrix}.$$

因为矩阵 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{K}$ 都是对角型的，所以微分方程(10.74)就成为

$$\begin{cases}J\ddot{q}_1+mglq_1=0,\\ J\ddot{q}_2+(2ka^2+mgl)q_2=0.\end{cases}$$

两个广义坐标各自有一个独立的方程，和两个彼此无联系的单自由度振动一样。因此就可以直接写出各自的解为

$$q_1 = c^{(1)}\sin\left(\sqrt{\frac{mgl}{J}}t + \theta^{(1)}\right),$$

$$q_2 = c^{(2)}\sin\left(\sqrt{\frac{2ka^2 + mgl}{J}}t + \theta^{(2)}\right).$$

$q_1 \neq 0, q_2 = 0$，代表第一主振动；而 $q_1 = 0, q_2 \neq 0$，代表第二主振动。 ▍

从这个例子中看出，如果选取合适的广义坐标，就可以把具有 s 个自由度的系统的各个主振动分离开来，好象 s 个独立的单自由度系统一样。这时的广义坐标叫做**简正坐标**，或**主坐标**。与简正坐标对应的惯量矩阵 **M** 和刚度矩阵 **K** 都是对角型的。因此寻求简正坐标的问题在数学上就相当于寻找一个非奇异的线性坐标变换，它能使得 **M** 和 **K** 同时对角化。有关简正坐标的详细讨论已超出本书的范围，下面举一个三自由度的例子略加介绍。

例10.30 三个相同的沿直线运动的质点，质量各为 m，用两个相同的弹簧相连，弹簧刚性系数各为 k。分析系统的振动(图10.38(a))。

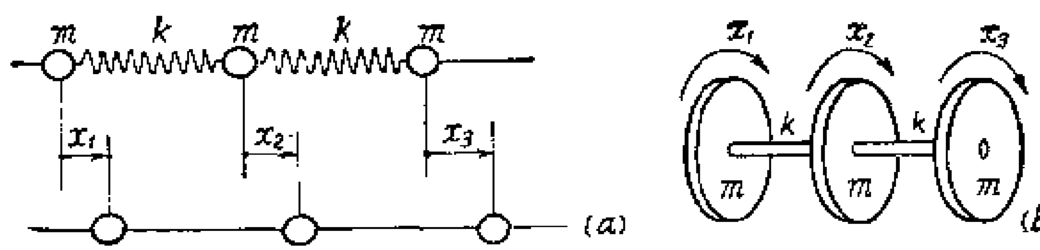


图10.38 三自由度的振动系统

这个系统是多种实际事物的模型。它可以代表图 10.20 中的列车，可以代表一个有三个原子的分子，也可以代表图10.38(b)中由三个相同圆盘和两段弹性轴相连的扭振系统，相应的 m 是转

动惯量，k 是抗扭刚度，其量纲是[力][长度]。

解 取质点的位移 x_1, x_2, x_3 为广义坐标（在圆盘系统中，x_1, x_2, x_3 代表转角）。动能和势能分别是

$$T=\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2),$$

$$V=\frac{k}{2}[(x_2-x_1)^2+(x_3-x_2)^2].$$

于是惯量矩阵和刚度矩阵是

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K}=\begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}.$$

频率方程是

$$\begin{vmatrix} k-m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k-m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k-m\omega^2 \end{vmatrix}=0,$$

展开得

$$-\omega^2(k-m\omega^2)(3k-m\omega^2)=0.$$

解出三个固有频率是

$$\omega^{(1)}=0, \quad \omega^{(2)}=\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega^{(3)}=\sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

代入振型方程(10.78)分别解得第一、第二、第三振型为

$$\begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ A_3^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ A_3^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_1^{(3)} \\ A_2^{(3)} \\ A_3^{(3)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

其实，由代数可知，三个固有频率就是矩阵 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 的三个特征值，而三个振型就是矩阵 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 分别关于三个特征值的特征向量。

由此可以得出运动微分方程的通解是

$$x_1=c^{(1)}(t+a_1)+c^{(2)}\sin(\omega^{(2)}t+a_2)+\frac{1}{2}c^{(3)}\sin(\omega^{(3)}t+a_3),$$

$$x_2 = c^{(1)}(t+\alpha_1) - c^{(3)}\sin(\omega^{(3)}t+\alpha_3),$$

$$x_3 = c^{(1)}(t+\alpha_1) - c^{(2)}\sin(\omega^{(2)}t+\alpha_2) + \frac{1}{2}c^{(3)}\sin(\omega^{(3)}t+\alpha_3),$$

其中因 $\omega^{(1)}=0$，对应的特解是 $t+\alpha_1$。

如果我们选取一组广义坐标(q_1, q_2, q_3)，它们与(x_1, x_2, x_3)的关系是

$$[x_1, x_2, x_3]^T = \mathbf{P}[q_1, q_2, q_3]^T, \qquad (1)$$

其中非奇异变换矩阵 **P** 的各列就是各个振型，**P** 叫做振型矩阵，即有

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & A_1^{(3)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & A_2^{(3)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(2)} & A_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

将式(1)代入原来的动力学方程

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0$$

之中，得

$$\mathbf{M}\mathbf{P}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{q} = 0.$$

上式两边同时左乘 $\mathbf{P}^T$，它成为

$$\mathbf{P}^T\mathbf{M}\mathbf{P}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}^T\mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{q} = 0.$$

令

$$\mathbf{M}' = \mathbf{P}^T\mathbf{M}\mathbf{P}, \quad \mathbf{K}' = \mathbf{P}^T\mathbf{K}\mathbf{P},$$

上式成为

$$\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}'\mathbf{q} = 0. \qquad (2)$$

这样，以 q_1, q_2, q_3 为广义坐标时，新的惯量矩阵是

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= m\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix};$$

新的刚度矩阵是

$$\mathbf{K}'=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1/2 & -1 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k & -k & 0\\ -k & 2k & -k\\ 0 & -k & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1/2\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$=k\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 9/2\end{bmatrix}.$$

且 $\mathbf{M}'$ 和 $\mathbf{K}'$ 都为对角矩阵，所以坐标 q_1,q_2,q_3 就是简正坐标。代入式(2)得出以简正坐标表示的运动微分方程，即

$$\begin{cases}3m\ddot{q}_1=0,\\ 2m\ddot{q}_2+2kq_2=0,\\ 3m\ddot{q}_3+9kq_3=0.\end{cases}$$

因为各个方程都是独立的，所以立即可以写出通解为

$$q_1=c_1(t+\alpha_1),$$

$$q_2=c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t+\alpha_2\right),$$

$$q_3=c_3\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t+\alpha_3\right),$$

其中三个 c_i 和三个 α_i 是积分常数，由初条件确定。▌

10-8 非完整系统

在此以前所讨论的约束系统都是具有几何约束的系统，即对质点系中各质点的空间位置加上某些限制①，相应的约束方程中只显含位置坐标和时间，而不显含速度。方程的形式是

$$f_i(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n;t)=0.$$

① 由于对空间位置有所限制，当然间接地对质点的速度会有所限制。

在速度约束方程中不仅显含位置和时间，同时还显含速度，即

$$f_i(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n;\dot{\boldsymbol{r}}_1,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_n;t)=0.$$

例如，考虑一个圆盘在一竖直平面内沿着水平线作纯滚动（图10.39）。如果圆盘在平面内完全自由，它就有三个自由度，可以取圆心坐标 x,y 和转角 φ 作为广义坐标。现在让它沿水平线滚动而不滑动，这相当于加上了接触点 A 的速度为零的约束条件，即

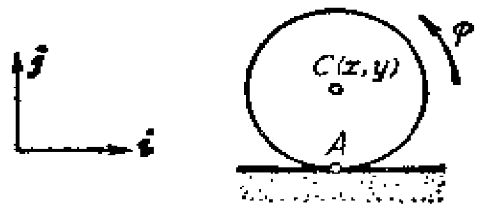


图10.39　完整约束

$$\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{CA}=0. \tag{10.81}$$

用 $\boldsymbol{v}_C=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$ 和 $\overrightarrow{CA}=-a\boldsymbol{j}$（$a$ 是圆盘半径）代入，得出两个约束方程

$$\dot{y}=0,\quad \dot{x}+a\dot{\varphi}=0.$$

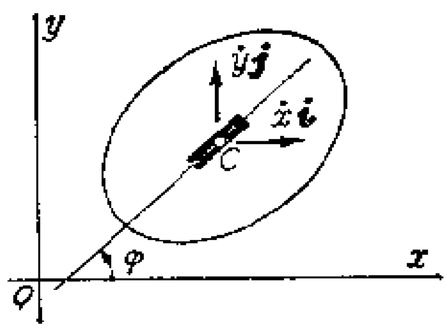
这两个约束方程看起来是速度约束方程，实际上可以分别积分，得

$$y=\text{常量},\qquad x+a\varphi=\text{常量},$$

即化成了几何约束方程。所以三个量 x,y,φ 中只有一个是独立的，即圆盘的自由度为1，可以取 x 和 φ 之中任意一个作为广义坐标。

并不是所有速度约束方程都可以经积分后成为几何约束方程。设刚体在水平面 Oxy 上运动，刚体上有一固定的冰刀 C，取 C 的坐标 x,y 和方向角 φ 为刚体的广义坐标（图10.40）。刚体滑动时冰刀 C 的速度 $\boldsymbol{v}_C$ 只能沿着冰刀的方向①，于是 $\boldsymbol{v}_C$ 的两个分量$(\dot{x},\dot{y})$应满足关系式

① 在这个力学模型中，忽略了冰刀的侧滑，并假设冰刀与冰面的接触面积比刚体本身表面积小得多，因此可以当作在一个点有接触来处理。这样 C 就抽象成为一个“有方向的点”。



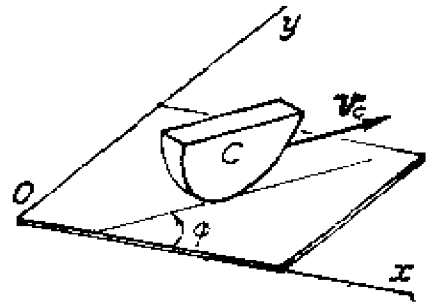


图10.40 非完整约束 $\dot{y}=\dot{x}\,\mathrm{tg}\,\varphi$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\mathrm{tg}\,\varphi,$$

或

$$\dot{x}\sin\varphi-\dot{y}\cos\varphi=0.$$

这也是一个速度约束方程，但它不能经积分化为几何约束方程。可能位移 dx,dy 满足的方程是

$$dx\sin\varphi-dy\cos\varphi=0,$$

因此虚位移 $\delta x,\delta y$ 之间应满足关系式

$$\delta x\sin\varphi-\delta y\cos\varphi=0.$$

这样，虽然有三个广义坐标 x，y，φ，但三个虚位移 $\delta x,\delta y,\delta\varphi$ 中却只有两个是独立的。

几何约束以及可积分成为几何约束的速度约束叫做**完整**① **约束**，不能积分成为几何约束的速度约束叫做**非完整约束**。只含有完整约束的系统叫做**完整系统**，含有非完整约束（一般也同时含有完整约束）的系统叫做**非完整系统**。

在完整系统中，我们定义系统的自由度数为描述质点系位形的独立变量的数目，相应的独立变量叫做广义坐标（10-2）。对于非完整系统，这两个概念要作适当的修改。我们定义广义坐标的数目是描述系统运动所需参数的最少个数，相应的参数就叫做广

① holonomic，来自希腊文，完全合法的意思。

义坐标。定义系统的**自由度数**是独立的虚位移的个数。因此，在完整系统中，广义坐标数等于自由度数，而在非完整系统中，广义坐标数大于自由度数。

例10.31 设轮子在粗糙水平面上作纯滚动（见图9.36），问轮子有几个自由度？

解 取轮心坐标(x,y,z)和欧拉角(ψ,θ,φ)为描述轮子位置的变量。轮子滚而不滑的条件是它与水平面接触点的速度为零，即有关系式

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{CA}=0.$$

经计算（见与图9.36有关的式子），得三个约束方程

$$\begin{cases}\dot{x}\cos\psi+\dot{y}\sin\psi+a\dot{\varphi}+a\dot{\psi}\cos\theta=0,\\ -\dot{x}\sin\psi+\dot{y}\cos\psi+a\dot{\theta}\sin\theta=0,\\ \dot{z}-a\dot{\theta}\cos\theta=0,\end{cases}$$

其中第三个方程可以积分化成几何约束方程（设水平面是$z=0$）

$$z=a\sin\theta.$$

但是前面两个方程无法积分成几何约束方程，所以轮子广义坐标有五个，例如可取x,y,ψ,θ,φ为广义坐标。它们的虚位移之间有两个关系式

$$\delta x\cos\psi+\delta y\sin\psi+a\delta\varphi+a\delta\psi\cos\theta=0,$$
$$-\delta x\sin\psi+\delta y\cos\psi+a\delta\theta\sin\theta=0.$$

在$\delta x,\delta y,\delta\psi,\delta\theta$和$\delta\varphi$中只有3个是独立的，所以系统的自由度数为3。这是非完整系统，自由度数小于广义坐标数。▎

*** 设轮子滚动时保持垂直于水平面（例如它是双轮手推车两轮子中的一个，图10.41）。问轮子有几个自由度？

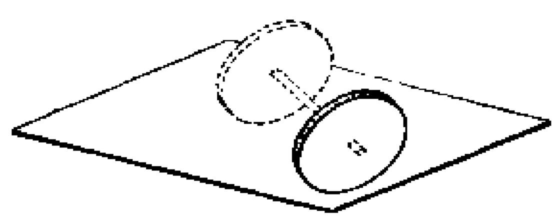


图10.41 轮子有几个自由度？

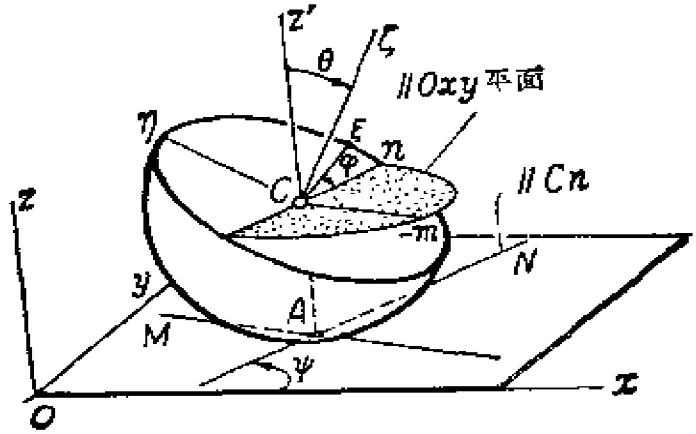


图10.42 一个典型的非完整系统

*** 设球在粗糙平面上作纯滚动（图10.42，其中只画了半个球），证明它有两个非完整约束方程（球半径为 a，球心坐标是 x，y，欧拉角 ψ, θ, φ 取法如图）：

$$\dot{x}=a\dot{\theta}\sin\psi-a\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi,$$

$$\dot{y}=-a\dot{\theta}\cos\psi-a\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi。\quad ***$$

必须强调指出，拉格朗日方程只适用于完整系统，为此不妨回顾一下它的推导过程。我们从动力学普遍方程（10.39)出发，将它通过 s 个广义坐标表成式(10.43)，或者

$$\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right]\delta q_j=0。\qquad (10.82)$$

由于完整系统中广义坐标的虚位移 $\delta q_1,\cdots,\delta q_s$ 彼此都是独立的，所以才能把上式"拆开"成为 s 个拉格朗日方程。而对于非完整系统，由于 $\delta q_1,\cdots,\delta q_s$ 彼此不独立，所以不能这样做。

处理非完整系统最简单的一种方法是使用待定乘子法。

设在考虑完整约束以后，系统有 s 个广义坐标 $q_1,\cdots,q_s$，此外系统还有 r 个线性非完整约束

$$\sum_{j=1}^{s}A_{ij}\dot{q}_j+B_i=0\qquad (i=1,\cdots,r),\qquad (10.83)$$

其中 A_{ij} 和 B_i 可以是常量，也可能是广义坐标与时间的函数，而且 $r<s$。

由式(10.83)得出 s 个广义坐标的虚位移应满足的方程为

$$\sum_{j=1}^{s} A_{ij}\delta q_j = 0 \qquad (i=1,\cdots,r)。 \qquad (10.84)$$

这就是说在 s 个 δq_i 中，只有 $s-r$ 个是独立的。

引进 r 个待定乘子 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，将它们与式(10.84)对应的方程相乘，并求和得出

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{s} A_{ij}\delta q_j\Big) = \sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i A_{ij}\Big)\delta q_j = 0。 \qquad (10.85)$$

将式(10.82)与式(10.85)相减，得

$$\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{i=1}^{r}\lambda_i A_{ij}\right]\delta q_j = 0。 \qquad (10.86)$$

虽然在 s 个 δq_j 中有 r 个是不独立的，我们可以适当地选取 r 个待定乘子 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$，使得式(10.86)中全部 δq_j 的系数都等于零，这个方法与第一类拉格朗日方程的推导方法是一样的。于是可以得出

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i A_{ij} \quad (j=1,\cdots,s)。 \qquad (10.87)$$

这 s 个方程称为**非完整系统的饶斯**[①] **方程**。式(10.87)与(10.80)联立共计有 $s+r$ 个方程，从中可以解出 s 个广义坐标（即系统的运动）以及 r 个待定乘子，这些乘子与非完整约束的约束力有关。

非完整系统的力学是分析力学中的一个专题，饶斯方程只是其中最简单的内容，更深入的讨论已超出本书的范围。

例10.32 在质心处装有冰刀的平板在水平冰面上运动（见图10.40）。初始时冰刀的位置和方向是

$$x(0)=0, \qquad y(0)=0, \qquad \varphi(0)=0;$$

速度为

① Routh, Edward John, 1831—1907，英国人。

$$\dot{x}(0)=v_0, \quad \dot{\varphi}(0)=\omega.$$

已知平板质量为 m，转动惯量为 J，木板受阻力 $\boldsymbol{F}=-c\boldsymbol{v}$，且通过质心。求木板的运动规律。

解 取质心坐标 x，y 及冰刀的方向角 φ 为广义坐标，其非完整约束方程为

$$\dot{x}\sin\varphi-\dot{y}\cos\varphi=0. \tag{1}$$

饶斯方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x}+c\dot{x}-\lambda\sin\varphi=0, & (2)\\ m\ddot{y}+c\dot{y}+\lambda\cos\varphi=0, & (3)\\ J\ddot{\varphi}=0. & (4)\end{cases}$$

由式(2)，(3)消去 λ，得

$$(m\ddot{x}+c\dot{x})\cos\varphi+(m\ddot{y}+c\dot{y})\sin\varphi=0. \tag{5}$$

由方程(4)及初条件 $\dot{\varphi}(0)=\omega$、$\varphi(0)=0$，解得

$$\varphi(t)=\omega t.$$

代入式(1)，得

$$\dot{y}=\dot{x}\,\mathrm{tg}\,\omega t.$$

对上式求一次导数

$$\ddot{y}=\ddot{x}\,\mathrm{tg}\,\omega t+\frac{\omega\dot{x}}{\cos^2\omega t},$$

代入式(5)，得

$$\ddot{x}+\left(\frac{c}{m}+\omega\,\mathrm{tg}\,\omega t\right)\dot{x}=0. \tag{6}$$

由此方程中解出 $x=x(t)$，随后就可算出 $y=y(t)$。

先考虑没有阻力的情形 $(c=0)$，由方程(6)和初条件，解得

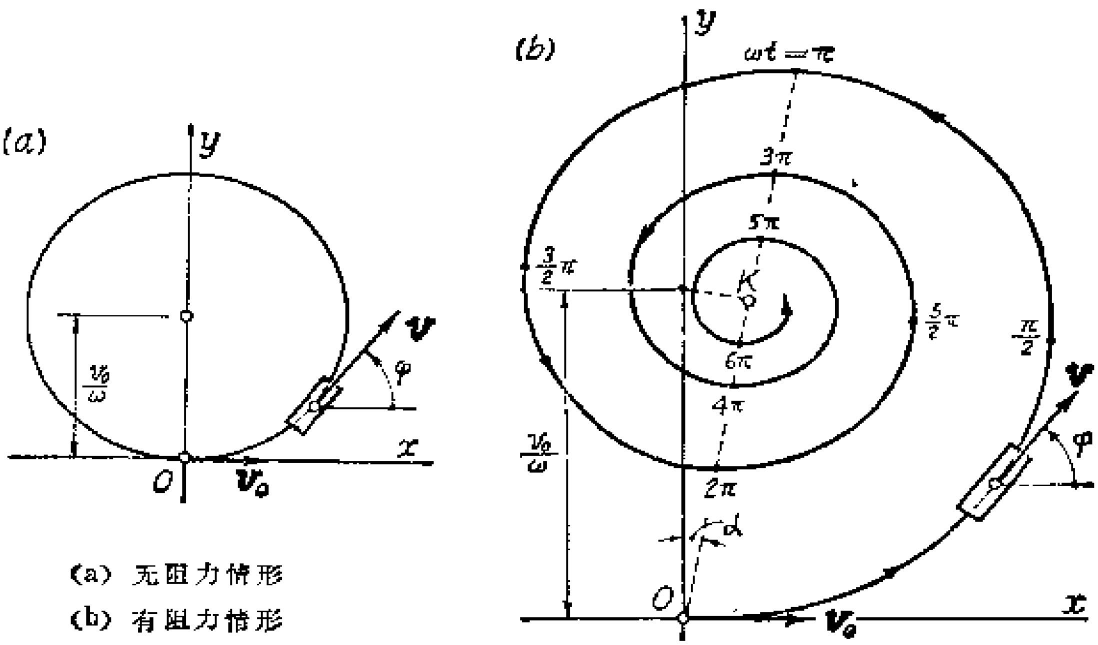
$$\dot{x}=v_0\cos\omega t, \quad x=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

代入式(1)，解出

$$\dot{y}=v_0\sin\omega t,\qquad y=\frac{v_0}{\omega}(1-\cos\omega t).$$

当然可以进一步算出 $\lambda=mv_0\omega$，不过目前它对我们没有什么用处。

由此可知，平板质心绕中心 $(0,\ v_0/\omega)$ 作匀速圆周运动(图10.43(a))，半径 $R=v_0/\omega$。



(a) 无阻力情形

(b) 有阻力情形

图10.43 带冰刀平板的质心运动轨道

在有阻力 $(c\neq0)$ 时，经过一些运算，可求得解为

$$x=R[\sin\alpha+e^{-t/\tau}\sin(\omega t-\alpha)],$$

$$y=R[\cos\alpha-e^{-t/\tau}\cos(\omega t-\alpha)],$$

$$\varphi=\omega t,$$

$$\lambda=mv_0\omega e^{-t/\tau},$$

其中衰减特征时间 $\tau=m/c$，$R=v_0\cos\alpha/\omega$，$\alpha=\mathrm{arc\,tg}(c/m\omega)$，质心的运动轨道见图10.43(b)。质心的速度大小按指数规律衰减，

即$v=v_0e^{-t/\tau}$。质心轨道的曲率半径为

$$\rho=\frac{v}{\omega}=\frac{v_0}{\omega}e^{-t/\tau}.$$

当$t\to\infty$时，质心位置趋于极限点$K(R\sin\alpha,R\cos\alpha)$，而平板在$K$处以等角速$\omega$一直转下去。▌

* * *　对上例使用解除冰刀而代之以相应的约束力的方法，导出平板的动力学方程。* * *

10-9　哈密顿正则方程

拉格朗日方程是广义坐标的二阶微分方程组。哈密顿正则方程是它的一种等价形式，是广义坐标和广义动量的一阶微分方程组，它适用于具有完整理想约束（定常或非定常），且主动力有势的系统。

设系统的拉格朗日函数是$L(q_1,\cdots,q_s;\ \dot{q}_1,\cdots,\ \dot{q}_s;t)$，广义动量是

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=p_i(q_1,\cdots,q_s;\ \dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s;t)$$

$$(i=1,\cdots,s),\qquad(10.88)$$

则拉格朗日方程可写成

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q_i}\qquad(i=1,\cdots,s).\qquad(10.89)$$

从方程(10.88)中可以反解出广义速度，它是广义坐标和广义动量的函数，即

$$\dot{q}_i=\dot{q}_i(q_1,\cdots,q_s;p_1,\cdots,p_s;t).\qquad(10.90)$$

根据式(10.60)，广义能量的表达式是

$$h=\sum_{i=1}^{s}p_i\dot{q}_i-L(q_1,\cdots,q_s;\ \dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s;t),$$

将式(10.90)代入上式，得到通过广义坐标和广义动量表示的广义能量表达式。为了与上式区别起见，不再用符号 h，而用H表示，即

$$
\begin{aligned}
&H(q_1,\cdots,q_s;p_1,\cdots,p_s;t)\\
&=\sum_{i=1}^{s}p_i\dot{q}_i(q_1,\cdots,q_s;p_1,\cdots,p_s;t)\\
&\quad -L[q_1,\cdots,q_s;\ \dot{q}_1(q_1,\cdots,q_s;p_1,\cdots,p_s;t),\\
&\qquad \cdots,\dot{q}_s(q_1,\cdots,q_s;p_1,\cdots,p_s;t);t]。\qquad (10.91)
\end{aligned}
$$

H 称为**哈密顿函数**。它的物理意义是代表广义能量，在定常约束情况中它就是总机械能，但应注意在数学形式上它必须是用广义坐标和广义动量表示的函数。

例10.33 考虑在水平面上不受外力作用的自由质点，写出它的哈密顿函数。

解 质点的动能和势能分别是

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2),\qquad V=0。$$

因此拉格朗日函数是

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)。$$

广义动量是

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\dot{x},\qquad p_y=\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=m\dot{y}。$$

广义能量是

$$h=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}-L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)。$$

实际上 h 就是总机械能。但是这还不是哈密顿函数，因为其中含有广义速度，而不是广义动量。用

$$\dot{x}=\frac{p_x}{m},\qquad \dot{y}=\frac{p_y}{m}$$

代入后得

$$H=\frac{p_x^2+p_y^2}{2m}.$$

这才是哈密顿函数。 ▌

从哈密顿函数可得出哈密顿正则方程。将式(10.91)对 q_j 求偏导数，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_j}&=\sum_{i=1}^{s}p_i\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_j}-\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}\\&=\sum_{i=1}^{s}\left(p_i-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}.\end{aligned}$$

在计算中使用了复合函数求导法则，并且把 p_i 看成是与 q_j 无关的独立变量。

将式(10.88)和(10.89)代入上式，得

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}=-\dot{p}_j. \tag{10.92}$$

同理，将H对 p_j 求偏导数，考虑式(10.88)可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_j}&=\dot{q}_j+\sum_{i=1}^{s}p_i\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial p_j}-\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial p_j}\\&=\dot{q}_j+\sum_{i=1}^{s}\left(p_i-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial p_j}=\dot{q}_j.\end{aligned} \tag{10.93}$$

联立式(10.92)和(10.93)得到一组 $2s$ 个变量 $q_i,p_i(i=1,\cdots,s)$ 的一阶微分方程组，称为**哈密顿正则方程**

$$\boxed{\begin{cases}\dot{q}_j=\dfrac{\partial H}{\partial p_j}\\ \\ \dot{p}_j=-\dfrac{\partial H}{\partial q_j}\end{cases}\quad(j=1,\cdots,s).}\tag{10.94}$$

从整个推导过程中，我们清楚地看到，方程(10.94)是与方程(10.88)和(10.89)①等价的。哈密顿正则方程的特点是每个方程都是一阶的，并且方程形式简单而又对称。

哈密顿正则方程的几何意义是这样的，在某一瞬间，系统的状态用 $2s$ 维空间中一个点表示，这个空间的坐标是由 s 个广义坐标和 s 个广义动量组成的，这个空间叫做**相空间**，其中的点叫做**相点**。当 $s=1$ 时，相空间就是一个二维的相平面（图 10.44）。当 $s\geqslant2$ 时，相空间只能想象，就画不出来了。当 q 取直角坐标 x 时，这个平面就相当于 4-6 中曾经讨论过的那种相平面(只是纵坐标相差一个比例系数 m)。质点系的运动过程在相空间中对应一条相轨迹，它每时每刻反映系统的位形与广义动量，而哈密顿正则方程(10.94)给出了相点的运动速度。在振动理论和统计力学中，相空间是很有用的表示方法。

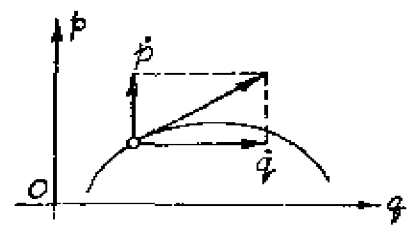


图10.44 二维相空间

下面考虑正则方程的首次积分。

如果 H 不显含某个广义坐标 q_j，即

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}=0,$$

则由(10.94)的第二个方程可得到广义动量积分

$$p_j=\text{常量}。$$

计算哈密顿函数 $H(q_1,\cdots,q_s;p_1,\cdots,p_s;t)$ 对 t 的全导数，得

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i\right).$$

在运动过程中，正则方程(10.94)成立，代入上式，则得

① 方程 (10.88) 和 (10.89) 即

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},\qquad \dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

也是变量 q_i 为 p_i 的方程，叫做拉格朗日正则方程。

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial H}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\right]=\frac{\partial H}{\partial t},$$

即广义能量对时间的变化率等于哈密顿函数H对时间的偏导数。因此，如果H中不显含时间t，则

$$\frac{dH}{dt}=0,$$

即广义能量守恒。所以正则方程的两类首次积分可表述为

（1）如H中不显含某个广义坐标q_j，则相应的广义动量p_j守恒。

（2）如H中不显含时间t，则广义能量H守恒。

例10.34 用哈密顿正则方程解单自由度线性振动问题。

解 取系统的一个广义坐标为q，则拉格朗日函数是

$$L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2,$$

其中m和k的意义已在10-7中作过说明。

广义动量是

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m\dot{q}.$$

由此算出哈密顿函数为

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{2}q^2.$$

哈密顿正则方程为

$$\dot{q}=\frac{p}{m},\qquad \dot{p}=-kq$$

（如消去p，则得方程$m\ddot{q}+kq=0$）。因为H不显含t，所以有广义能量积分

$$\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{2}q^2=E\ (\text{常量}).$$

可见在相平面（q-p 平面）上，相轨迹是一族椭圆，其中每一个椭圆的大小由总能量 E 确定。当然，相轨迹也可以从正则方程经消元得到。在正则方程中消去 t，得

$$\frac{dp}{dq}=-\frac{kmq}{p}.$$

积分后得到的式子与能量积分完全是等价的。▌

例10.35 写出例10.19（图10.25）中质点的哈密顿正则方程及其首次积分。

解 拉格朗日函数是

$$L=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2+ma^2\omega(\dot{\theta}+\omega)(1+\cos\theta).$$

求得广义动量是

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ma^2[\dot{\theta}+\omega(1+\cos\theta)].$$

解出

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{ma^2}-\omega(1+\cos\theta).$$

哈密顿函数为

$$H=ma^2\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{p_\theta}{ma^2}-\omega(1+\cos\theta)\right]^2-\omega^2(1+\cos\theta)\right\}.$$

由此得出哈密顿方程是

$$\begin{cases}\dot{\theta}=\dfrac{p_\theta}{ma^2}-\omega(1+\cos\theta),\\[2ex] \dot{p}_\theta=\omega\sin\theta(-p_\theta+ma^2\omega\cos\theta).\end{cases}$$

由于 H 不显含 t，所以广义能量守恒，即

$$\frac{1}{2}\left[\frac{p_\theta}{ma^2}-\omega(1+\cos\theta)\right]^2-\omega^2(1+\cos\theta)=\text{常量}.$$

其实它就是

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2}-\omega^2(1+\cos\theta)=\text{常量}.$$

这与例10.19的结果一致。 ▌

例10.36 写出平面开普勒问题（见4-7)的哈密顿正则方程及其首次积分。

解 取极坐标 ρ,φ 为两个广义坐标，则势能为

$$V=-\frac{k}{\rho},$$

拉格朗日函数为

$$L=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2)+\frac{k}{\rho}.$$

广义动量为

$$\begin{cases}p_\rho=m\dot{\rho},\\ p_\varphi=m\rho^2\dot{\varphi}.\end{cases}$$

解得

$$\dot{\rho}=\frac{p_\rho}{m},\qquad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{m\rho^2}.$$

算出哈密顿函数为

$$H=\frac{p_\rho^2}{2m}+\frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2}-\frac{k}{\rho}.$$

由此得出正则方程是

$$\dot{\rho}=\frac{p_\rho}{m},\qquad \dot{p}_\rho=-\frac{k}{\rho^2}+\frac{p_\varphi^2}{m\rho^3},$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{m\rho^2},\qquad \dot{p}_\varphi=0.$$

因为H中不显含 φ，所以有广义动量积分 $p_\varphi=G$（常量），这就是动量矩守恒式。又因为H不显含 t，所以有广义能量积分 $H=h$（常量)，即

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+\frac{G^2}{2m\rho^2}-\frac{k}{\rho}=h,$$

这就是机械能守恒式。 ▌

在简单的例子中，用正则方程来讨论运动并不见得有什么优越性，反而感觉麻烦了。但是对于自由度多的系统，由于方程被写成 $2s$ 个一阶方程，形式比较整齐，有利于研究。在天体力学中至今还在应用的摄动法，就是将哈密顿函数按照小参数展开后，再应用正则方程的一种方法。分析力学中有一个很重要的专题叫做正则变换，它是讨论怎样在保持方程正则性的前提下通过变换来得到首次积分或化简方程，其内容已超出本书的范围。

哈密顿正则方程是在经典力学范围内推导出来的，但是用广义坐标及广义动量表出的运动方程已被推广应用到微观和高速问题中去，经典力学的方法在非经典力学中得到了推广和应用。

10-10 哈密顿原理

哈密顿原理是经典力学中另一个原理，可以与牛顿定律或动力学普遍方程(10.39)平行当作经典力学的另一个起点。

哈密顿原理是一个“最小化”原理。在物理学中寻找最小化原理的兴趣源远流长，因为人们预计某个物理过程的进展可能与某些重要的量保持最小化（例如路径最短，时间最少，能量最小等等）相联系的，只是应该选哪些量作为标志不容易弄清楚。第一个最小化原理在公元前二世纪，从对光的研究中得到①，即一条光线由一点经平面镜反射到另一点，永远取最短的路径。

在力学中最小化原理有最小作用量原理②，最小拘束原理③，最小曲率原理④等等，其中哈密顿原理虽然提出的时间比较晚（1834—1835年期间），但原理简洁明了，所以获得了广泛的应

① 由古希腊的亚历山大里亚的希罗（Hero of Alexandria）给出。1657年费马（Fermat, P., 1601—1665）修订了这一原理，指出一条光线在一介质中自一点到另一点永远走需时最少的路径。

② 由莫培督（Maupertuis, Pierre, L.M.de, 法国人1698—1759）于1747年提出。

③ 由高斯（Gauss, Karl, F., 1777—1855）于1828年提出。

④ 由赫芝（Hertz, H.R., 1857—1894）修正了高斯的最小拘束原理后提出。

用。

哈密顿原理在数学方面涉及某个泛函的极值(驻定值)问题，或称变分问题，因此首先要简短地说明一下变分问题的概念与有关的结论。

设系统的自由度为1，它的运动规律是$q=q(t)$，称为真实运动。

由于时间变化dt，引起了真实运动的坐标有一个变化，叫做微分，即

$$dq=\dot{q}dt.$$

考虑另外一个时间函数$\tilde{q}(t)$，它与函数$q(t)$的关系为

$$\tilde{q}(t)=q(t)+\alpha\eta(t),$$

其中α是任意小的常量，$\eta(t)$是任意可微函数。$\tilde{q}(t)$与$q(t)$是不同的函数，它们对应于不同的运动。由于函数本身的形状有了变化，将每一时刻的改变量记作δq，即

$$\delta q=\tilde{q}(t)-q(t)=\alpha\eta(t),$$

每一时刻t对应一个δq值，它表示同一时刻$\tilde{q}(t)$与$q(t)$之差别，所以叫**等时变更**或**变分**。dq与δq的差别从图10.45中可以看出。

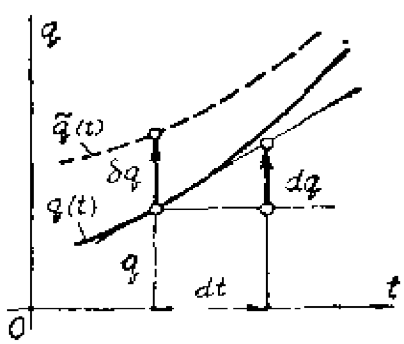


图10.45　dq与δq的差别

考虑一个定积分

$$I=\int_{t_0}^{t_1}F(q,\dot{q},t)dt,\quad (10.95)$$

其中的F是有连续二阶偏导数的多元函数，$q(t)$有连续二阶导数。I称为函数$q(t)$的一个泛函，它是函数$q(t)$的函数。

考虑所有这样的函数集合

$$\tilde{q}(t)=q(t)+\delta q=q(t)+\alpha\eta(t),\qquad (10.96)$$

其中$\eta(t)$是定义在$t_0\leqslant t\leqslant t_1$上的有二阶连续导数的任意函数，

且有

$$\eta(t_0)=\eta(t_1)=0.$$

这个函数集合称为函数 $q(t)$ 的"邻域"。

将"邻域"中任意一个函数代入式(10.95)，可得一个 I 值。泛函驻定值（包括极大、极小值）问题，或变分问题的提法是：问在 $q(t)$ 的邻域中，使得泛函 I 取极值的条件是什么？并找出对应的函数 $q(t)$ 来。

如果 $q(t)$ 表示一个真实运动，$\widetilde{q}(t)$ 就是在每一时刻与真实运动相差一变分 δq 的"邻近运动"。因为在 q 空间中位形点是自由的，所以 $\widetilde{q}(t)$ 就是"可能运动"。由于已经假定

$$\eta(t_0)=\eta(t_1)=0,$$

所以真实运动与可能运动在起始时刻与终了时刻无差别（图10.46）。变分问题的任务是在可能运动的集合中，找出一个真实运动来。

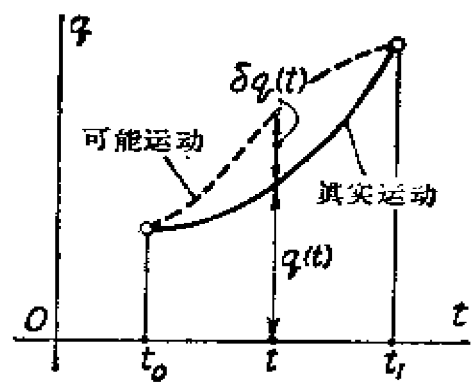


图10.46　真实运动和可能运动

将式(10.96)代入式(10.95)，并把 I 看成是变量 α 的函数，得

$$I(\alpha)=\int_{t_0}^{t_1}F(q+\alpha\eta,\dot{q}+\alpha\dot{\eta},t)dt.$$

在 α 足够小的范围内，或者说对应于 $q(t)$ 的足够小的"邻域"内，使泛函取驻定值的必要条件是

$$\left[\frac{d}{d\alpha}I(\alpha)\right]_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\eta+\frac{\partial F}{\partial\dot{q}}\dot{\eta}\right)dt=0. \qquad (10.97)$$

记作

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}F(q,\dot{q},t)dt=0,$$

或

$$\delta I=0.$$

因为有关系式

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\eta\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)\eta\right]dt$$

$$=\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\eta\right]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)\eta\, dt$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)\eta\, dt$$

代入式(10.97)得

$$\delta I=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)\right]\eta\, dt=0.$$

因为η是任意的，且方括号中的函数对t连续，所以在区间$[t_0, t_1]$上方括号中的函数应恒等于零，即

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial F}{\partial q}=0. \qquad (10.98)$$

它被称为变分法中的欧拉-拉格朗日方程。这就是说使泛函取驻定值的$q(t)$必须满足此方程。

在数学上还可以证明对函数F及q要求的条件可以放宽，只要F有一阶分段连续偏导数，q有一阶连续导数就可以。

如果F中不显含t，则方程(10.98)有一个首次积分

$$F-\dot{q}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}=\text{常量}. \qquad (10.99)$$

这是因为

$$\frac{d}{dt}\left(F-\dot{q}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\ddot{q}\right]-\left[\ddot{q}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}+\dot{q}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)\right],$$

将式(10.98)代入，得

$$\frac{d}{dt}\left(F-\dot{q}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)=\frac{\partial F}{\partial t}.$$

以上对单自由度情况的讨论不难推广到具有 s 个自由度的情况中去。设系统的运动对应于 s 维位形空间(q 空间)中的一条轨线：

$$q_i=q_i(t) \quad (i=1,\cdots,s).$$

考虑每一个广义坐标有一个变分 δq_i，则可能运动可以表成

$$\tilde{q}_i(t)=q_i(t)+\delta q_i=q_i(t)+\alpha_i\eta_i(t) \quad (i=1,\cdots,s)$$

为了表达各广义坐标随时间 t 的变化关系，在 s 维位形空间基础上再加上变量 t，组成一个 $s+1$ 维空间 (q-t 空间)。初始时刻 $t=t_0$ 时，有 $q_{10},\cdots,q_{s0}$，对应此空间中的一个点，记作 A；终止时刻 $t=t_1$ 时，有 $q_{11},\cdots,q_{1s}$，对应于 B 点，则系统的运动过程对应于这 $s+1$ 维空间中自 A 点至 B 点的一条多维曲线，如图10.47(a)或(b)所示。

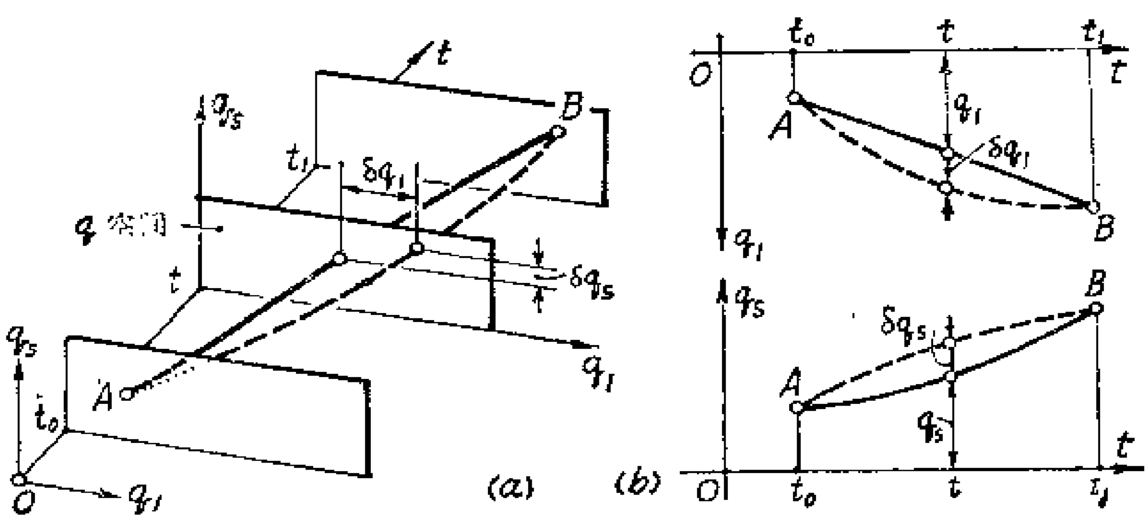


图10.47 q-t 空间中的真实运动（实线）与可能运动（虚线）

根据类似的理由，使泛函

$$I=\int_{t_0}^{t_1}F(q_1,\cdots,q_s;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s;t)dt$$

取驻定值的必要条件是

$$\delta I=\sum_{i=1}^{s}\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial F}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\eta_i dt=0.$$

由于 η_i 的任意性以及方括号中函数的连续性，同样可以得出变分问题的欧拉-拉格朗日方程组

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial F}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,\cdots,s). \tag{10.100}$$

显然式(10.98)是(10.100)在 $s=1$ 时的特例。

例10.37 最速降线 (brachistochrone) 问题①。在竖直平面 Axy 中，有一光滑的金属丝，经过点 $A(0,0)$ 和点 $B(x_1,y_1)$ (B 点低于 A 点)。一质点在重力作用下自 A 点沿金属丝自由下滑(图10.48)，问金属丝为何形状时质点到达 B 点所需时间最少？

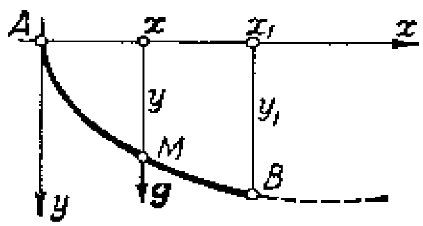


图10.48 最速降线

解 质点下降所需的时间是

$$\tau=\int_{x=0}^{x=x_1}\frac{ds}{v}.$$

其中弧元 ds 为

$$ds=\sqrt{1+(y')^2}dx.$$

由能量定理求得 $v=\sqrt{2gy}$，于是有

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx.$$

与式(10.95)比较，目前的 x 相当于 t，y 相当于 q，F 为

$$F(y,y',x)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}.$$

---

① brachistos (最短)，chrone (时间)。这个问题是约翰·伯努利 (1667—1748) 在1696年提出的，历经莱布尼兹、牛顿、雅可比、伯努利等人的努力，方得比较完善的解决。

由于F中不显含x，所以欧拉-拉格朗日方程有一个首次积分。由式(10.99)得

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}-y'\left(\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right)=\text{常量},$$

化简后为

$$y(1+y'^2)=\text{常量}。$$

令此常量为$2a$。于是有

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2a-y}{y}}。$$

将变量换元，令$y=a(1-\cos\theta)$，得

$$x=\int\sqrt{\frac{y}{2a-y}}dy=\int a(1-\cos\theta)d\theta=a(\theta-\sin\theta)+c。$$

因曲线经过(0,0)点，确定积分常数$c=0$。最后有

$$x=a(\theta-\sin\theta),\qquad y=a(1-\cos\theta)。$$

这是旋轮线的参数方程，其中常量a由曲线需经过已知点$B(x_1, y_1)$这一条件决定（需要求解超越方程）。结论是质点沿通过已知两点的旋轮线自由下滑时，需时最少。❙

例10.38 圆锥面上的短程线（测地线）①。顶角为2α的圆锥面上有两个任意的已知点A与B（图10.49），两点间路程为极小值的曲线叫做短程线。求短程线的方程。

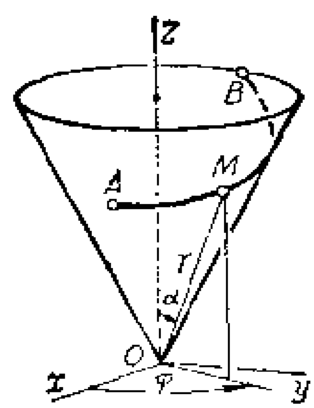


图10.49 圆锥面上的短程线

解 两点间的路程为

$$\overline{AB}=\int_A^B ds。$$

取球坐标(r,α,φ)，因α为常数，故

$$(ds)^2=(dr)^2+(r\sin\alpha\, d\varphi)^2。$$

① 在4-8例4.31中讨论过有关的问题。

代入得

$$\overline{AB}=\int_{\varphi_A}^{\varphi_B}\sqrt{(dr/d\varphi)^2+(r\sin\alpha)^2}\,d\varphi,$$

其中已把 r 看成是 φ 的函数，即 $r=r(\varphi)$，这就是锥面上的曲线方程。

代入欧拉-拉格朗日方程(10.98)，得

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r'}{\sqrt{(r')^2+(r\sin\alpha)^2}}\right)-\frac{r\sin^2\alpha}{\sqrt{(r')^2+(r\sin\alpha)^2}}=0.$$

这就是短程线应满足的微分方程。

为了便于给出直观的几何解释，引进变换

$$u=\frac{1}{r},\qquad \psi=\varphi\sin\alpha.$$

因此有

$$u'=\frac{du}{d\psi}=-\frac{1}{r^2\sin\alpha}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right).$$

代入以上微分方程，经化简($u\neq0$)得

$$u''+u=0.$$

它的解是

$$u=c_1\cos\psi+c_2\sin\psi,$$

即

$$\frac{1}{r}=c_1\cos(\varphi\sin\alpha)+c_2\sin(\varphi\sin\alpha),$$

其中积分常数 c_1 与 c_2 由曲线上的 A，B 两点的具体位置确定。

如果把 r 与 ψ 看成极坐标，则这条短程线就是这个坐标中的一条直线。其实 (r,ψ) 就是将锥面展开成为平面扇形时的极坐标(见图4.52)。 ▌

现在叙述哈密顿原理。哈密顿引进一个积分

$$S=\int_{t_0}^{t_1}L(q_1,\cdots,q_s;\dot q_1,\cdots,\dot q_s;t)\,dt,$$

其中L就是拉格朗日函数。这个积分称为**哈密顿作用量**，它是$q_1,\cdots,q_s$的泛函。

哈密顿原理为：在相同的时间，相同的始终位置和相同的约束条件下，完整、主动力有势的系统在所有可能运动中，眞实运动使哈密顿作用量取驻定值①，即眞实运动是以下变分问题的解：

$$\boxed{\delta S=\delta\int_{t_0}^{t} L(q,\dot{q},t)dt=0,}$$

其中q和$\dot{q}$是$q_1,\cdots,q_s$和$\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s$的缩写。这样力学上求眞实运动的问题就被化成数学上的变分问题。哈密顿原理给出了一个准则，以便在众多的可能运动（约束许可的邻近运动）中，将眞实运动区分出来。

至此为止，我们看到，所有的力学原理可以分成不变分的和变分的两大类：

不变分的原理指出眞实运动的某些公共的性质，例如眞实运动要遵守牛顿定律或能量守恒定理等等，其中又分为微分形式的和积分形式的。微分形式的不变分原理指出每一瞬时必须遵守的条件，例如牛顿定律或达朗伯原理。另外一种则指出在某一非无限小时间间隔内必须遵守的条件，例如能量守恒定理和动量变化定理等。

变分的原理提供了区分眞实运动与其他（在同样的运动学条件下）可能运动的准则，这个准则在数学上往往是以某一个泛函（或函数）的驻定值问题的形式出现的。

变分的与不变分的原理在认识与表述自然界的基本规律上带有根本性的差别。正确表述一个变分原理，要点有三：

---

① 1871年J. A. Serret 证明，对积分限加上一些限制条件以后有$\delta^2S>0$，即对于真实运动来说，作用量S取极小值。所以此原理也被称为哈密顿最小作用量原理。

（1）明确可供互相比较的运动的范围，即明确可能运动集合的定义；

（2）明确真实运动的变更方式，前面我们选用的是等时变更，也可以有其他的变更方式；

（3）确定对哪一个量取驻定値，或者说确定对哪个泛函（或函数）取驻定値。

对以上三点作不同的处理，就可能产生不同的变分原理，如前面曾经提到过的最小作用量原理、最小拘束原理以及最小曲率原理等都是变分原理。变分原理也可以分为微分形式的，即每一瞬时判别真实运动的准则，例如虚位移原理；以及积分形式的，例如哈密顿原理。

哈密顿原理还可以推广到非有势力系统及非完整系统中去。对于非有势力系统，原理的数学表达式为

$$\delta S+\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{k}Q_i\delta q_i\right)dt=0,$$

其中 S 仍是哈密顿作用量，Q_i 是非有势力所对应的广义力，被积函数是非有势力所作的虚功。

如果把哈密顿原理作为基本原理加以接受，那么不难直接导出拉格朗日方程。因为根据哈密顿原理，

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(q_1,\cdots,q_s;\ \dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s;\ t)dt=0.$$

作为变分问题来说，$q_1,\cdots,q_s$ 应该满足欧拉–拉格朗日方程(10.100)。将 L 代替 F，就得出

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\quad(i=1,\cdots,s).$$

这就是完整的、主动力有势的系统的拉格朗日方程。反过来，我们也可以由拉格朗日方程导出哈密顿原理。

可以这样说，哈密顿原理与拉格朗日方程是等价的，而拉格

朗日方程可以由动力学基本方程导出。在10-2中已经讨论过虚位移原理与牛顿定律的一致性，达朗伯原理与牛顿定律是等价的。因此我们可以说，作为牛顿力学、拉格朗日力学和哈密顿力学出发点的三个基本原理是互相等价的。

哈密顿原理以及一般说来积分形式的变分原理，特别适用于近似解法，在连续介质力学、结构力学等邻域中用得很广泛。下面通过两个例子说明哈密顿原理的意义以及近似解法的基本思想。

例10.39 一质量 $m=1$ 的质点沿 x 轴运动，受到常力 $F_x=2$ 的作用。已知 $t=0$ 和 $t=1$ 时的位置分别为 $x(0)=0$，$x(1)=1$，求质点的运动规律。

解 拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}^2+2x,$$

因此哈密顿作用量为

$$S=\int_0^1\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2+2x\right)dt.$$

由 $\delta S=0$，得拉格朗日方程为

$$\ddot{x}=2.$$

积分上式并由终端条件 $x(0)=0$，$x(1)=1$ 定出积分常数。最后得真实运动的解是

$$x=t^2.$$

这是精确解。将它代入哈密顿作用量 S 中，所得 S 的值是最小值

$$S_{\min}=\int_0^1\left[\frac{1}{2}(2t)^2+2t^2\right]dt=\frac{4}{3}=1.333.$$

虽然这个精确解法是异乎寻常地简单，但为了说明近似解法的思想，下面用近似解法求解。

设想我们不知道真实运动，但 $x=t^n$ 这个函数满足所给定的

端点条件 $x(0)=0$ 和 $x(1)=1$，因此当 n 取各种不同的正值时，它就是可能运动的一个集合。将它代入哈密顿作用量中，得

$$S(n)=\int_0^1\left[\frac{1}{2}(nt^{n-1})^2+2t^n\right]dt=\frac{n^3+n^2+8n-4}{2(2n^2+n-1)}.$$

我们求出使 S 取驻定值的 n，即令

$$\frac{dS}{dn}=0,$$

解得 $n=2$。我们没有求解微分方程也得出了真实运动 $x=t^2$。不过这只是"碰巧"，因为事先我们并不知道真实运动是否属于所选取的可能运动的集合 $x=t^n$。我们再选取可能运动的另一个集合，看看有什么结果。

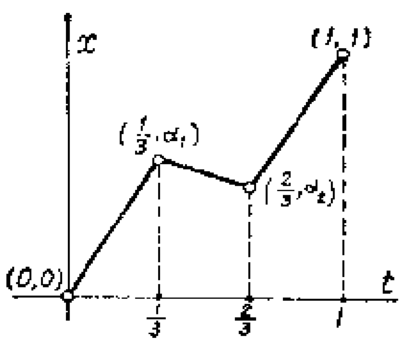


图10.50　一组可能运动

假定可能运动曲线 $x(t)$ 是由三段直线组成的折线（图10.50）。这条折线应该满足所给的端点条件 $x(0)=0$，$x(1)=1$，但同时保留两个可供选择的参数 α_1 和 α_2。三段直线的方程分别为

$$x=3\alpha_1 t,\qquad 当\ 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{3},$$

$$x=\alpha_1+3(\alpha_2-\alpha_1)\left(t-\frac{1}{3}\right),\qquad 当\ \frac{1}{3}<t\leqslant\frac{2}{3},$$

$$x=\alpha_2+3(1-\alpha_2)\left(t-\frac{2}{3}\right),\qquad 当\ \frac{2}{3}<t\leqslant 1.$$

它们的转折点坐标是 $(1/3,\alpha_1)$ 和 $(2/3,\alpha_2)$。

以此作为可能运动的集合，代入 S 中（积分时要分三段进行，然后相加）得

$$S=\frac{3}{2}\alpha_1^2+\frac{3}{2}(\alpha_2-\alpha_1)^2+\frac{3}{2}(1-\alpha_2)^2+\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2+\frac{1}{3}.$$

这样S就成为α_1和α_2的函数

$$S=S(\alpha_1,\alpha_2).$$

S取驻定值的条件是

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=0: \qquad 6\alpha_1-3\alpha_2+\frac{2}{3}=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=0: \quad -3\alpha_1+6\alpha_2-\frac{7}{3}=0.$$

解得$\alpha_1=1/9,\alpha_2=4/9$，代入$S$，此时$S$的值为$S=1.352$。显然它比$S_{\min}=1.333$要大。它是在目前这种条件下（以三段直线近似地代替连续的真实运动）所能达到的最好结果。我们就把与此对应的折线作为真实运动的近似解。我们发现，使S取驻定值的α_1和α_2，刚好使折线的两个转折点(1/3,1/9)和(2/3,4/9)落在精确解$x=t^2$这条曲线上。当然，这也只是一种巧合。

为了进一步提高近似解的精确度，我们可以用四段直线组成的折线来逼近精确解。它们的起点与终点还是(0，0)与(1，1)，三个转折点为$(1/4,\alpha_1)$，$(1/2,\alpha_2)$，$(3/4,\alpha_3)$。再用以上相同的计算过程，不过现在$S=S(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$有三个可供选择的参数。由

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3}=0,$$

解出

$$\alpha_1=\frac{1}{16}, \qquad \alpha_2=\frac{1}{4}, \qquad \alpha_3=\frac{9}{16}.$$

代入S得

$$S\left(\frac{1}{16},\frac{1}{4},\frac{9}{16}\right)=1.344.$$

它比前面所得的$S(1/9,4/9)=1.352$更接近于$S_{\min}=1.333$。所以用四段直线组成的折线求得的近似解更好一些。

同样，如果考虑用k段直线来逼近，将时间间隔作k等分，

与$k-1$个转折点对应的有$k-1$个参数：$a_1,\cdots,a_{k-1}$，采用以上相同的方法可算出，使S取驻定值的参数值为

$$a_1=\left(\frac{1}{k}\right)^2,\quad a_2=\left(\frac{2}{k}\right)^2,\ \cdots,\ a_{k-1}=\left(\frac{k-1}{k}\right)^2.$$

这时S的值为

$$S=\frac{4}{3}+\frac{1}{6k^2}.$$

显然，k取得越大，它就与$S_{\min}=4/3$相差越小。▌

上面的例子说明，为了近似地解泛函S的驻定值问题，可以设一组近似解（不一定是折线），满足给定的端点条件，并在近似解中保留n个可供调整的参数$a_1,\cdots,a_n$，于是S就成为这些参数的函数

$$S=S(a_1,\cdots,a_n).$$

令

$$\frac{\partial S}{\partial a_i}=0\quad(i=1,\cdots,n).$$

解出使S取驻定值的$a_i(i=1,\cdots,n)$的值，由此得到这个问题的近似解。一般说来，参数保留得愈多，所得的近似解与精确解愈接近。另一方面，近似解的形式也要选得好，这样才能在参数数目相同的情况下取得更好的效果。这种方法叫做李兹（Ritz）法。力学中可以有各种方法近似地求解泛函驻定值问题，李兹法只是其中的一种。

下面的例子所采用的近似解的函数形式更接近于实际问题中常用的函数。

例10.40 质量$m=1$的质点在x-y平面上运动，外力的势能由$V=xy$给出，在$t=0$时它在原点$(0,0)$，在$t=1$时它在$(2,0)$。求质点的运动。

解 我们先求精确解，以便与近似解作比较。在实际问题中一般说来精确解是不容易求出的，所以解题时不必有这一步。

拉格朗日函数是

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-xy,$$

相应的拉格朗日方程是

$$\ddot{x}+y=0, \qquad \ddot{y}+x=0.$$

它的通解是

$$x=c_1\sin t+c_2\cos t+c_3\mathrm{sh}t+c_4\mathrm{ch}t,$$
$$y=c_1\sin t+c_2\cos t-c_3\mathrm{sh}t-c_4\mathrm{ch}t.$$

满足题中端点条件的特解是

$$x=\frac{\sin t}{\sin 1}+\frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{sh}1}, \qquad y=\frac{\sin t}{\sin 1}-\frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{sh}1}. \qquad (1)$$

这是精确解。它使哈密顿作用量

$$S=\int_0^1\left[\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-xy\right]dt \qquad (2)$$

取得极小值

$$S_{\min}=\mathrm{ctg}\,1+\mathrm{cth}\,1=1.935128.$$

下面用李兹法求近似解。在 $x-t$ 图和 $y-t$ 图上连结两给定端点的直线方程是

$$x=2t, \qquad y=0.$$

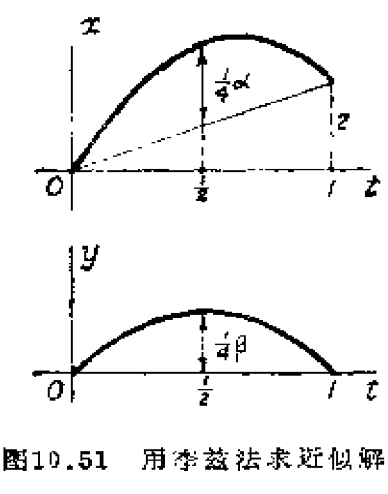


图10.51 用李兹法求近似解

现在再加上两端均为零的函数，这种在 $t=0$ 和 $t=1$ 都等于零的最简单的函数是$t(1-t)$。因而我们选取

$$\begin{cases}x=2t+\alpha t(1-t),\\ y=\beta t(1-t)\end{cases} \qquad (3)$$

作为可能运动的集合。这里 α,β 是参数，它们是$x(t)$和$y(t)$偏离直线的一种度量，如图10.51所示。

以(3)代入(2)求得哈密顿作用量 S 为

$$S=S(\alpha,\beta)=\int_0^1\left[\frac{1}{2}(2+\alpha-2\alpha t)^2+\frac{1}{2}\beta^2(1-2t)^2\right.$$

$$\left.-(2t+\alpha t-\alpha t^2)\beta t(1-t)\right]dt.$$

下面求使$S(\alpha,\beta)$取得极值的α和β。

令

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial \beta}=0,$$

得

$$\int_0^1[(2+\alpha-2\alpha t)(1-2t)-(t-t^2)\beta t(1-t)]dt=0,$$

$$\int_0^1[\beta(1-2t)^2-(2t+\alpha t-\alpha t^2)t(1-t)]dt=0.$$

积分后得

$$\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{30}\beta=0,\qquad -\frac{1}{30}\alpha+\frac{1}{3}\beta=\frac{1}{6}.$$

解得

$$\alpha=5/99,\qquad \beta=50/99.$$

代回(3)，求得近似解为

$$x=2t+\frac{5}{99}t(1-t),\quad y=\frac{50}{99}t(1-t). \tag{4}$$

这组近似解(4)和精确解(1)在时间的大范围内性能极不一样，但是在我们所关心的时间间隔(0，1)内，(4)和(1)的差别不大，见表10.1。相应于(4)的S值为12793/6534=1.957912。

这里采用最简单的函数作为近似解，x和y各保留了一个参数，其结果仍有参考价值。如果事先知道$y(t)$左右不对称，峰值偏右，我们可以在(3)中将y改用

$$y=\beta t(1-t^2),$$

表 10.1

t	精确解(1)		近似解(4)		改进后解(5)
	$x(t)$	$y(t)$	$x(t)$	$y(t)$	$y(t)$
0	0	0	0	0	0
0.2	0.4074	0.0648	0.4081	0.0808	0.0616
0.4	0.8123	0.1133	0.8121	0.1212	0.1131
0.6	1.2128	0.1293	1.2121	0.1212	0.1292
0.8	1.6082	0.0968	1.6081	0.0808	0.0969
1	2	0	2	0	0
	$S_{\min}=1.955128$		$S=1.957912$		1.955135

精确度就可以提高。改进后的解是

$$\begin{cases} x=2t+\dfrac{16}{317}t(1-t), \\ y=\dfrac{320}{951}t(1-t^2), \end{cases} \tag{5}$$

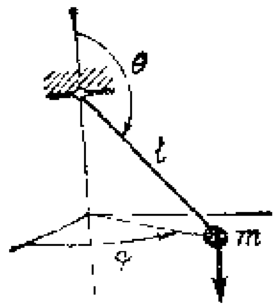
其中的 x 与(4)中的 x 值相差很小，因为两式中的系数

$$\frac{5}{99}=0.050505\cdots,\qquad \frac{16}{317}=0.050473\cdots$$

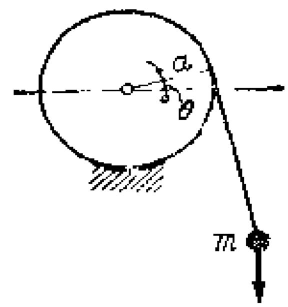
相差甚微，而 $y(t)$ 的値如表 10.1 中最后一列所示，它有了显著改进。相应于(5)的 S 値是5578/2853=1.955135。 ▎

习　题

10.1　写出质量为 m，长为 l 的球面摆的运动微分方程。



题 10.1 图

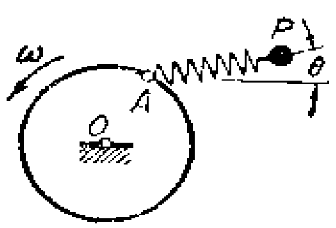


题 10.2 图

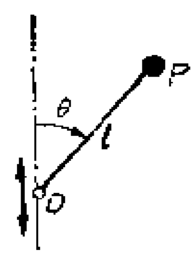
10.2　一质点的质量为m，拴在一线上，线的另一端绕在半径为a的固定圆柱体上，圆柱体的中心轴水平安置。设在平衡位置时线下垂部分的长度为l。不计线的质量，写出质点的运动微分方程。

10.3　用拉格朗日方程解8、11题。

10.4　水平面上质量为m的质点P由一弹簧与同一平面内的圆盘边缘上一点A相连，弹簧的原长为a，弹性系数为k。圆盘的半径为R，它以匀角速度ω绕过盘心O的竖直轴转动。不计摩擦和绳子的质量，求质点的运动微分方程。



题 10.4 图



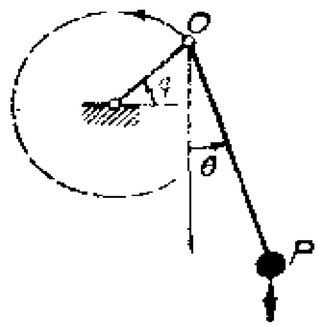
题 10.5 图

10.5　倒摆由质量为m的质点P和轻刚性杆OP组成，支点O在竖直方向的运动规律为$z=A\sin\omega t$，其中A,ω为常量。求质点的拉格朗日函数和运动微分方程。

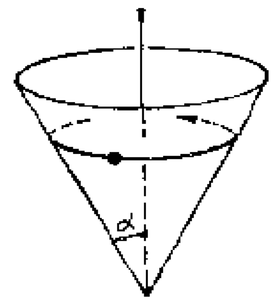
10.6　用拉格朗日第一类方程求单摆的绳中张力。设摆长为

l，摆锤的质量为m。

10.7　单摆由质量为m的质点P，长为l的轻刚性杆组成，其悬挂点O以常速率v作半径为a的匀速圆周运动，悬挂点O与质点P均在同一竖直平面内运动，重力加速度为g，求单摆的运动微分方程。



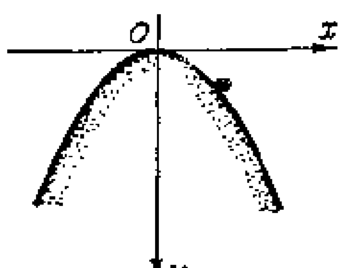
题 10.7 图



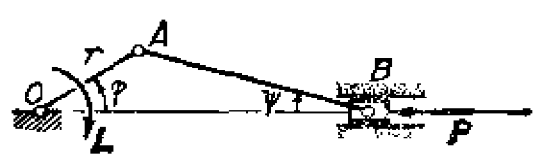
题 10.8 图

10.8　质量为m的质点在光滑的倒立圆锥的内表面上运动，圆锥的半顶角为α，对称轴为竖直轴。求证，在重力作用下质点在水平圆周上运动是可能的，并求此时的速度。

10.9　一质点在重力作用下沿光滑的抛物柱面下滑，开始时质点在柱面的顶端O点附近，初速为零。柱面的方程为$y=ax^2$，x为水平轴，y轴竖直向下（见图），a为常数。证明：质点在下滑过程中不会脱离柱面。



题 10.9 图

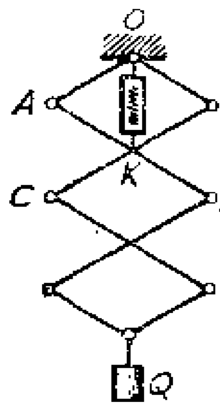


题 10.10 图

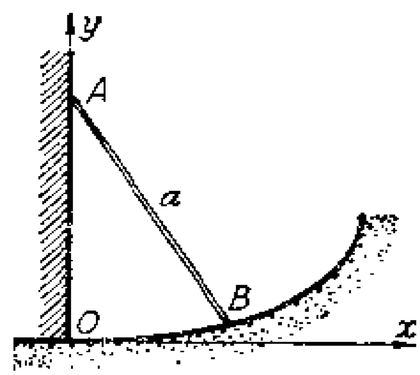
10.10　发动机的活塞上受到推力$\boldsymbol{P}$的作用，曲柄OA的长

度为 r，不计摩擦和各杆件的重量，求曲柄上的转矩 L 与角度 φ,ψ 及力的大小 P 的关系（见图）。

10.11 图示平面连杆机构，$A,B,C,D,\cdots$，为铰接．不计 $OA,OB,AD,BC,\cdots$，等杆的重量，这些杆件组成 n 个菱形（图中画出 3 个）。OK 为弹簧秤，机构的下端挂一重量为 Q 的物体，求弹簧秤所指示的值。



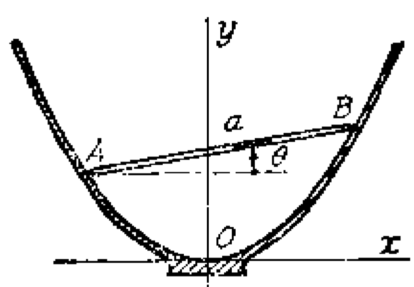
题 10.11 图



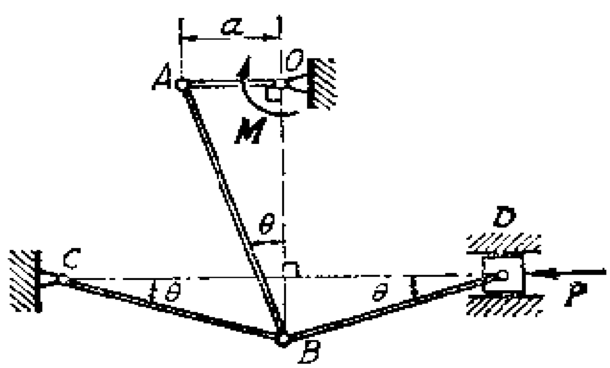
题 10.12 图

10.12 均质杆 AB，长度为 a，一端靠在光滑竖直墙上，另一端靠在光滑固定的侧面上，侧面为柱面，柱轴垂直 Oxy 面。如果要使杆子在 Oxy 面内的任意位置均是平衡位置，问侧面的形状应是什么？

10.13 均质杆 AB 的长度为 a，放在一内壁光滑的固定容器内，这容器的形状为一旋转抛物面。如抛物面的方程为 $x^2=2py$，求杆的平衡位置。



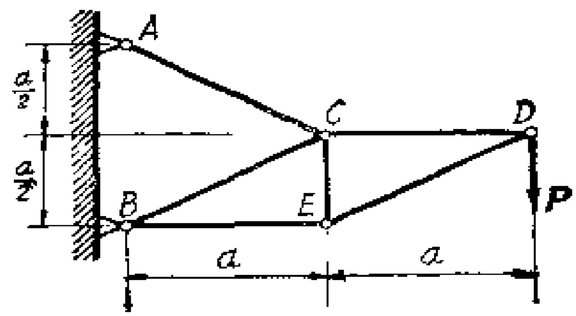
题 10.13 图



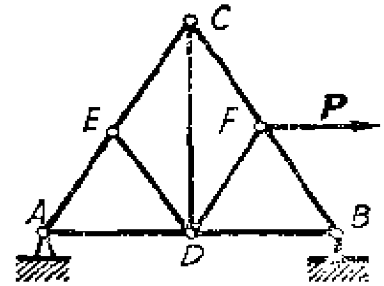
题 10.14 图

10.14 在图示机构中，曲柄OA上作用一力偶，其矩为M，滑块D上作用一水平力P。机构尺寸及位形如图示，机构处于平衡状态，不计摩擦，求力偶矩M和力P的关系。

10.15 求图示平面桁架中AC杆和BC杆的内力。



题 10.15 图



题 10.16 图

10.16 图示平面桁架，ABC为等边三角形，D，E，F分别为三边的中点，求CD杆的内力。

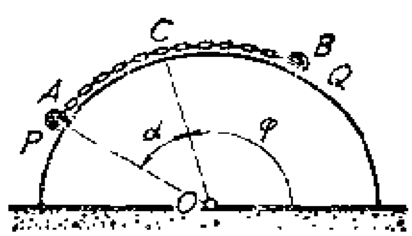
10.17 用虚位移原理解1.36题。

10.18 用虚位移原理解1.57题。

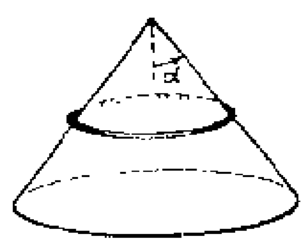
10.19 用虚位移原理解1.60题。

10.20 三根等长的均质杆AB,AC,AD构成一三脚架，A点为铰接，三足B,C,D在光滑水平面上，且形成等边三角形。今用一绳圈套在三足上，使三脚架的位形不能改变。已知每根杆与竖直线的夹角为θ，重量均为w，求绳中张力。

10.21 线密度为ρ的均质重链，其两端固连着重量分别为P和Q的小球A和B。链条放在半径为R的光滑圆柱面上，如图



题 10.21 图



题 10.22 图

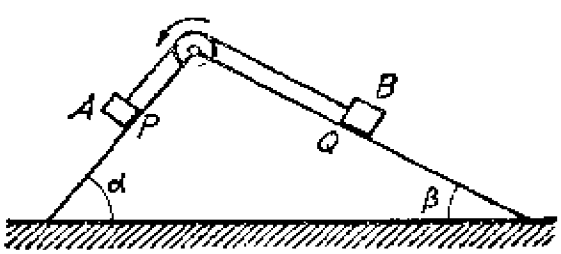
所示。圆柱轴线水平放置，链子所在平面与圆柱轴线垂直，$\angle AOC=\alpha$，C为链条的中点。求平衡时OC线与水平线的夹角φ。

10.22　重w的橡皮圈水平地套在半顶角为α的粗糙直立正圆锥面上，摩擦角为ε。求证平衡时橡皮圈中的张力在$\frac{w}{2\pi}\operatorname{ctg}(\alpha+\varepsilon)$与$\frac{w}{2\pi}\operatorname{ctg}(\alpha-\varepsilon)$之间。

如果套在不光滑的球表面上，橡皮圈呈水平且纬度角为α，则有同样的结果。

10.23　用达朗伯原理求例8.7中杆的平衡位置。

10.24　重物A和B的重量分别为P和Q，用一通过滑轮的绳子连结。两物可沿三棱柱的斜面滑动。已知A，B和斜面的摩擦系数为μ，斜面倾角分别为α和β（见图）。不计滑轮和绳子的重量，求重物滑动时的加速度。



题 10.24 图



题 10.25 图

10.25　将质量为M长为l的长条木板放置在倾角为α的光滑斜面上，使板的轴线沿斜面的最大倾斜线。一质量为m的人欲自静止开始自板的上端在木板上往下跑，且保持木板静止不动，求证这人到达板的下端所需的时间为

$$t=\sqrt{\frac{2ml}{(M+m)g\sin\alpha}}.$$

10.26　一均质杆的质量为m，它可绕其一端自由转动。今

将这杆自水平位置自由放下，求杆通过竖直位置时支点上的反作用力。

10.27　一均质细杆AB，长为$2a$，质量为M。今用长为l的轻细线将杆的A端与固定点O相连，并将杆挂起。线与杆保持在同一竖直平面内，这平面以等角速度绕过O点的竖直轴Oz转动。线、杆与Oz轴（方向向下）的夹角分别用θ和φ表示。求证，当杆处于相对平衡时有

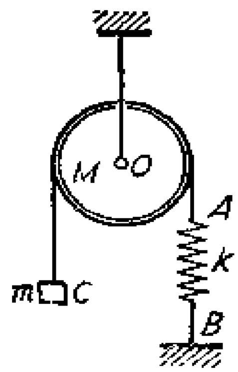
$$3l(\mathrm{tg}\varphi-\mathrm{tg}\theta)\sin\theta=(4\mathrm{tg}\theta-3\mathrm{tg}\varphi)\sin\varphi.$$

10.28　用达朗伯原理解5.15题。

10.29　某机器上一飞轮，绕着它的垂直于轮面的中心轴以匀角速ω转动，飞轮可以看作是质量为m，半径为r的均质圆环。假定圆环所能承受的张力不得超过F，问转速ω不得大于何值飞轮才能安全运转？

10.30　用达朗伯原理解8.10题。

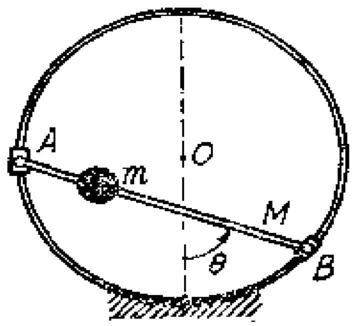
10.31　一滑轮可绕水平轴O转动，在滑轮上绕有一条不可伸长的绳子，绳之一端挂一质量为m的重物C，绳的另一端A固结一竖直弹簧AB，弹簧的B端固定不动，弹簧的刚度系数为k。已知滑轮质量为M并分布在轮缘上，绳子与滑轮之间无相对滑动，求重物C的振动周期。



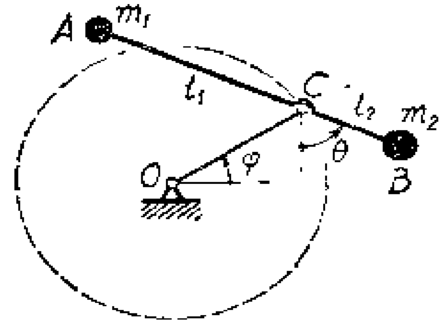
题 10.31 图

10.32　一均质圆锥体在粗糙斜面上滚动，斜面与水平面的倾角为α，圆锥母线长为l，顶角为2β，写出圆锥的运动微分方程。（提示：取接触母线与斜面最大倾斜线之间的夹角θ为广义坐标。）

10.33　一均质杆AB，长度为$2a$，质量为M，两端约束在一半径为R的光滑水平圆周上（$a<R$）。质量为m的甲虫以不变的相对速度u沿杆运动，初始时甲虫在杆的中点。设杆与某一固定直径的夹角为θ，求杆AB的运动规律。



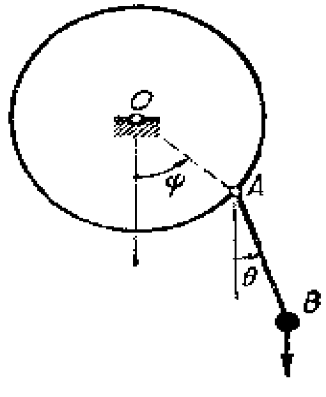
题 10.33 图



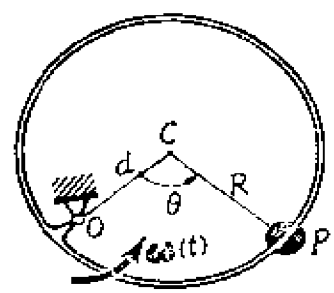
题 10.34 图

10.34 长为R的直杆OC在水平面内以匀角速$\dot{\varphi}=\omega$绕O点转动，在水平面内的杆AB与OC在C点铰接，$AC=l_1$，$BC=l_2$，A,B端各连结质量为m_1,m_2的质点，不计AB杆的质量，写出AB杆的运动微分方程，并求它的相对平衡位置。

10.35 一均质圆盘，半径为R，质量为M，可以绕通过盘心O的水平轴转动。在圆盘边缘一点A上悬挂一长为l的轻杆AB，杆的B端固结一质量为m的质点。考虑重力的影响，写出该系统的运动微分方程。



题 10.35 图



题 10.36 图

10.36 半径为R的水平金属环，可以绕通过O点的垂直于环平面的竖直轴转动，$OC=d$。金属环上有质点P。已知圆环的

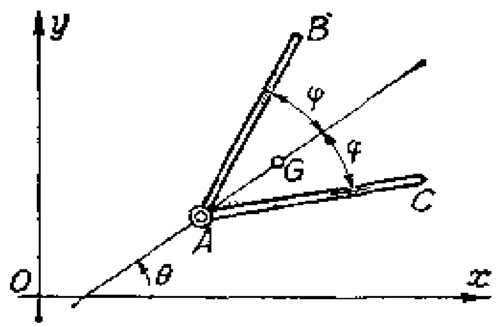
转动角速度为$\omega(t)$，如果取$\angle OCP=\theta$为广义坐标，不计摩擦，求证

$$R\ddot{\theta}+\dot{\omega}(R-d\cos\theta)=d\omega^2\sin\theta.$$

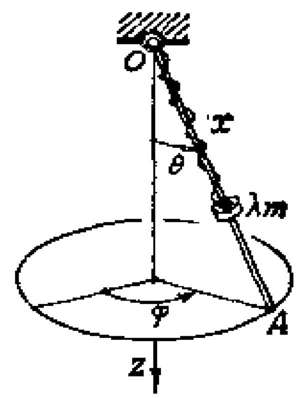
10.37 用拉格朗日方程解例4.11。

10.38 两均质杆AB和AC在A点铰接，每根杆的质量为m，长度为$2a$，两杆可在水平面上自由运动。设系统质心G的坐标为(x, y)，两杆与Ox轴的夹角为$\theta\pm\varphi$，Oxy为平面上的固定直角坐标系（见图）。求证系统的动能是

$$T=m\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)a^2\dot{\theta}^2+\left(\frac{1}{3}+\cos^2\varphi\right)a^2\dot{\varphi}^2\right].$$



题 10.38 图



题 10.39 图

10.39 质量为m，长为$2a$的均质杆OA，其O端与固定点铰接，杆与向下竖直线Oz的夹角为θ。平面AOz与固定竖直面的夹角为φ。质量为λm的光滑小环套在杆OA上，小环与固定点O之间由弹簧相连，弹簧的自然长度为a，弹性系数为nmg/a。求证系统的动能为

$$T=\frac{2}{3}ma^2(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{\lambda m}{2}(\dot{x}^2+x^2\dot{\theta}^2+x^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta),$$

其中λ, n为常量，x是小环与O点的距离。

再证明，如果$\theta=\pi/3$，$x=4a/3$是可能的稳定运动，则

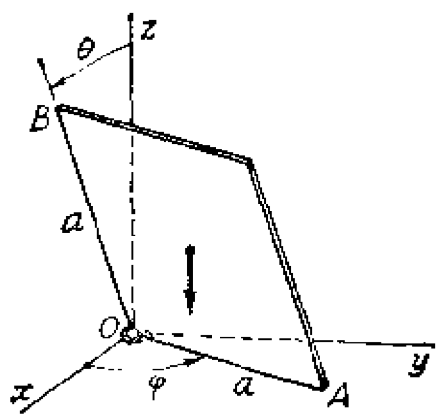
$$\dot{\varphi}^2=3g/2a,\quad n=6\lambda.$$

10.40 用拉格朗日方程推导刚体定点运动时欧拉动力学方程的第三式。

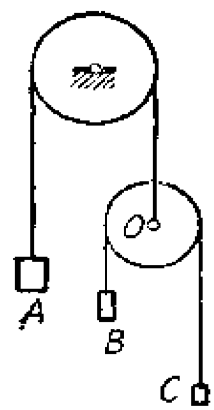
10.41 均质正方形薄板的一个顶点可绕固定点O运动，而其一边OA被约束在光滑水平面上。初始时平板静止在竖直平面内，受到小扰动后因重力作用而倒下，求证另一边OB与Oz轴的夹角θ由下式决定

$$a\dot{\theta}^2(7+25\sin^2\theta)=48g(1-\cos\theta)(1+\sin^2\theta),$$

其中a是正方形的边长。



题 10.41 图



题 10.42 图

10.42 图示系统中，重物块A,B,C的质量分别为$6m,2m,m$，动滑轮O的质量为$3m$，不计滑轮的转动惯量。求动滑轮O和各个物块的加速度。

10.43 用拉格朗日方程解9.35题。

10.44 均质杆AB，质量为m，长度为$2a$，其A端通过一根轻的弹性绳OA与固定点O相连。绳的自然长度为l，弹性系数为k，杆与拉紧的绳子一起在过O点的竖直平面内运动。用θ和φ分别表示OA,AB与向下竖直线的夹角，用$l+\xi$表示弹性绳OA的长度。证明杆子的动能是

$$T=\frac{m}{2}\left[\dot{\xi}^2+(l+\xi)^2\dot{\theta}^2+\frac{4}{3}a^2\dot{\varphi}^2\right]$$

$$+ma\dot{\varphi}\left[(l+\xi)\dot{\theta}\cos(\varphi-\theta)-\dot{\xi}\sin(\varphi-\theta)\right].$$

如果考虑到作用在杆上的重力，作用在B端的水平外力X和竖直向下的外力Y，推导系统的运动微分方程。

10.45　用拉格朗日方程求5.15题中楔的加速度。

10.46　用拉格朗日方程求6.6题中链条的运动方程。

10.47　用拉格朗日方程解7.18题。

10.48　用拉格朗日方程解7.39题。

10.49　用拉格朗日方程解7.48题。

10.50　用拉格朗日方程解例7.26。

10.51　用拉格朗日方程解9.20题。

10.52　光滑水平面上的两根均质杆AB和BC，质量分别为m_1,m_2，长度分别为$2a$和$2b$，在B点铰接，初始时静止并在一直线上。今在A点作用一垂直于杆的水平冲量I，求打击后A，B，C三点的速度。

10.53　质量为m的均质刚性杆，两端点的速度分别为$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$。证明杆的动能是

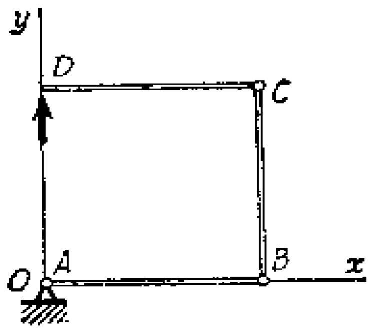
$$\frac{m}{6}(u^2+v^2+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}).$$

质量都是m的三根均质刚性杆OA,AB,BC，A点和B点为铰接点，挂在固定点O，它们在重力作用下处于平衡状态。今在杆AB上作用一冲击力偶，其冲量矩大小为L，方向垂直AB。证明打击后系统的初始动能是$57L^2/(26ml^2)$，其中l是杆AB的长度。

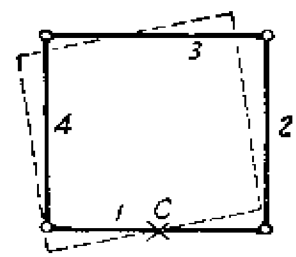
10.54　三根质量相同的等长的均质杆AB,BC,CD，在B，C点铰接。开始时静止在光滑水平面上且成一直线。今在B点作用一垂直于杆的水平冲量I，求证：三杆的初始角速度之比为

7:(−6):2。

10.55 三根等长度的均质杆 AB,BC,CD，铰接成正方形的三边，放在光滑水平面上，A端固定。今在D点作用一$\overrightarrow{AD}$方向的冲量，证明三杆的初始角速度大小之比为1:0:11。



题 10.55 图



题 10.56 图

10.56 四根相同的均质杆，端点铰接而成一个正方形框架。初始时它们在自身平面内绕正方形中心以常角速度ω转动。今突然摁住其中一根杆的中点C，求各杆的角速度。

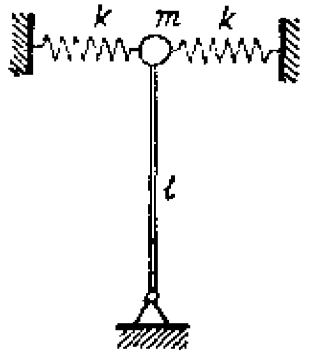
10.57 用冲量形式的拉格朗日方程（例10.26）解7.50题。

10.58 固定圆柱体的半径为R，其轴为水平，在它上面放置另一个半径为r的均质圆柱体，其轴也为水平且与固定圆柱体的轴垂直。系统平衡时上面圆柱体的重心与下面圆柱体的轴在同一竖直平面内，问此系统为何种平衡？

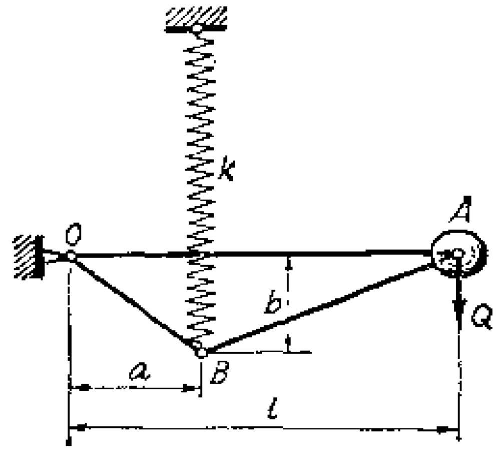
10.59 用拉格朗日方程求7.67题中杆的微振动周期。

10.60 图示地震仪中的无定位摆，摆长为l，小球质量为m，两个弹簧相同且刚度系数均为k。平衡时两弹簧呈水平且保持原长。在运动时杆与弹簧保持在同一竖直平面内，不计杆重，求系统的微振动周期，设已知$2kl>mg$。

10.61 图示竖向地震仪。框架OAB的尺寸如图，A处固连一重球，框架和重球的共同重心在A点，且共同重量为Q，它们绕O点的转动惯量为J，弹簧的刚度系数为k。平衡时OA杆在



题 10.60 图



题 10.61 图

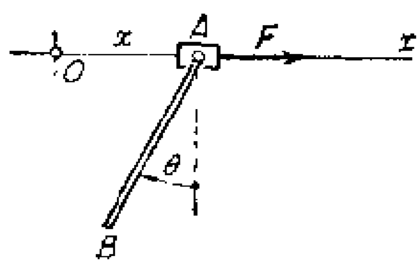
水平位置。框架和弹簧始终保持在同一竖直平面内。求证系统在平衡位置附近作微振动的(圆)频率为

$$\omega=\{[ka^2-F_0b(1-b/L)]/J\}^{1/2},$$

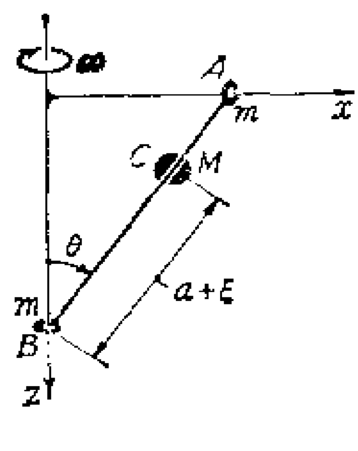
其中 L 为弹簧在平衡位置时的长度，$F_0=Ql/a$。

10.62 长为$2a$，质量为m的均质杆AB，它的A端通过质量为m的小环悬挂在光滑的水平固定导轨上，初始时静止。力F沿导轨方向作用在环A上。如果取A点与其初始位置点O的距离为x，$\angle OAB=90°-\theta$，求系统的运动微分方程。

如果A点以常加速度g运动，证明杆在竖直线（$\theta=0$）和水



题 10.62 图



题 10.63 图

平线（$\theta=90^\circ$）之间摆动，并且

$$F=\frac{mg}{8}[19-12\sin\theta+9(\sin2\theta-\cos2\theta)].$$

10.63　如图，x 和 z 是两根互相垂直的固连的刚性杆，它们以常角速度 ω 绕竖直轴 z 转动。小环 A 和 B 的质量均为 m，可以分别沿 x 和 z 轴滑动。AB 杆为轻刚性杆，长度为 $2a$，小珠子 C 的质量为 M，可沿 AB 杆滑动，不计摩擦。取广义坐标为 θ 和 ξ，求系统的动能。

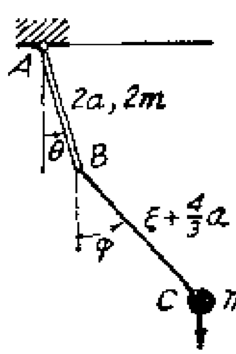
利用拉格朗日方程证明：仅当

$$a\omega^2=\frac{g\cos\alpha}{\sin^2\alpha},\qquad (M+2m)\mathrm{tg}^2\alpha=M+4m$$

时，稳定的运动

$$\xi=0,\qquad \theta=\alpha=\text{常数}$$

才是可能的。



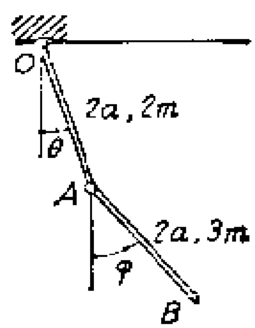
题 10.64 图

10.64　质量为 $2m$，长度为 $2a$ 的均质杆 AB，可绕通过 A 端的水平轴自由摆动。一轻的弹性绳的一端与杆的 B 端相连，另一端固结一质量为 m 的质点 C。当系统处在稳定平衡位置时，绳 BC 的长度为 $4a/3$，它的伸长是 ε。如果系统在通过 AB 的竖直平面内作微振动，则取杆和绳子与向下竖直线的夹角分别是 θ 和 φ（见图），绳子的长度是 $\xi+4a/3$。求证：ξ，$\varphi+2\theta$，$2\varphi-3\theta$ 是系统的简正坐标，它们对应的单摆的折合长度分别是 ε，$8a/3$，$a/3$。

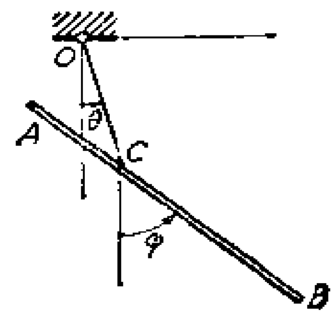
10.65　在上题中，若杆 AB 的质量改为 $3m$，弹性绳的原长为 a，弹性系数 $k=mg/2a$，其他条件不变。求系统微振动的主频率，对应单摆的折合长度，振型和简正坐标。

10.66　图示双摆，均质杆 OA 的质量为 $2m$，长度为 $2a$，均

质杆AB的质量为$3m$，长度为$2a$。求系统在竖直平面内微振动时的主频率和振型。



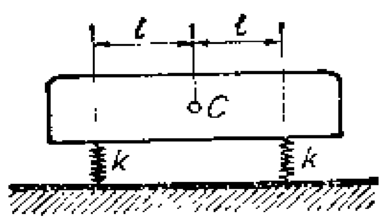
题 10.66 图



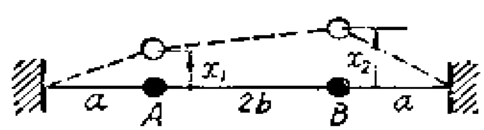
题 10.67 图

10.67 质量为m，长度为$12a$的均质杆AB，通过长度为$5a$的不可伸长的细线OC与固定点O相连，C为杆上一点，且$AC=4a$，系统在竖直平面内的平衡位置附近作微振动。OC，AB与向下竖直线的夹角分别为θ和φ（见图），求系统的主频率和振型。

10.68 图示为列车车厢的简化模型（平面模型），重心C到通过两轮心的竖直线的距离为l，两个支承弹簧是一样的，刚度系数都是k，车厢重量为Q，绕C点转动的迴转半径为ρ。求车厢在竖直平面内微振动的固有频率。



题 10.68 图

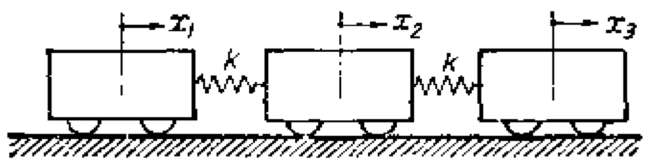


题 10.69 图

10.69 两个质量均为m的质点A和B，固连在一根拉紧的弹性绳子上（见图），当处于平衡状态时，A，B离固定端的距

离为a，A与B之间的距离为$2b$，绳中张力为T。不计重力，求系统在平衡位置附近横向微振动的主频率和简正坐标。

10.70 在水平直铁轨上停着三节车厢，车厢的重量均为Q，车厢间挂钩的刚度为k。初始时右边车厢离开平衡位置的距离为$x_3(0)=x_0$(小量)，其他两车厢为$x_1=0$，$x_2=0$，初速均为零。求系统微振动时的固有频率，振型和三节车厢的运动规律。

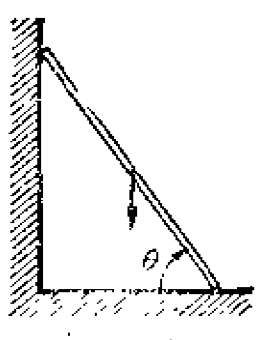


题 10.70 图

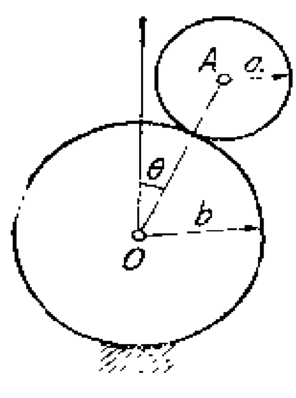
10.71 写出自由质点在匀角速转动的参考系中的哈密顿函数。

10.72 用哈密顿正则方程求7.14题中盘心的加速度。

10.73 均质直杆AB，长度为$2l$，质量为m，它的两端靠在竖直墙和水平地板上（见图）。初始时杆静止，$\theta=\theta_0$，不计摩擦，运动时杆保持在垂直于墙的竖直平面内。用哈密顿正则方程求杆在任一位置的角速度ω（杆不脱离墙时）。



题 10.73 图

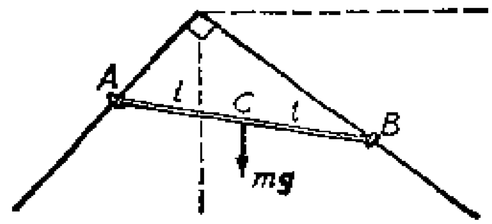


题 10.74 图

10.74 半径为a的均质圆柱体A，自半径为b的固定圆柱

的顶端在重力作用下无滑动地滚下，初始时小圆柱静止。用哈密顿正则方程求柱心A的加速度（表成θ的函数）。

10.75 质量为m，长度为$2l$的均质杆AB被限制在竖直平面内运动，且其两端A和B只能沿着两条互相垂直的光滑细杆滑动。用哈密顿正则方程求杆在平衡位置附近作微振动的频率。



题 10.75 图

10.76 用哈密顿原理求复摆微振动时的周期τ。设摆的质量为m，对悬挂点的转动惯量为J，质心C到悬挂点的距离为l。

10.77 用变分法证明圆柱面上两点之间的短程线是螺旋线，这样的短程线是否唯一？

10.78 平面谐振子的拉格朗日函数是

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

已知$t=0$时点在$(2,0)$处，$t=1$时在$(0,3)$处。用李兹法求近似解，选取$x(t)$，$y(t)$为二次抛物线，而后令哈密顿作用量

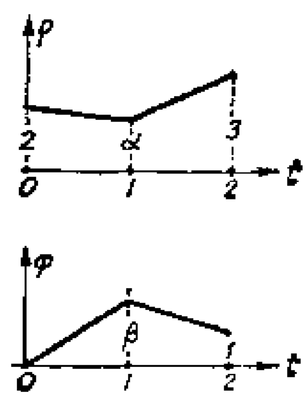
$$S=\int_0^1 Ldt$$

取得驻定值。比较$t=1/2$时精确解和近似解的值。

10.79 设质点运动的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2).$$

已知$\rho(0)=2$，$\varphi(0)=0$；$\rho(2)=3$，$\varphi(2)=1$。用李兹法求$\rho(1)$，$\varphi(1)$。采用图中折线变化的$\rho(t)$和$\varphi(t)$，求出α,β使哈密顿作用量



题 10.80 图

$$S=\int_0^2 L dt$$

取得驻定值，并与精确解比较。

（提示：求精确解时改用直角坐标，近似法给出的α,β满足

$$\beta(2\alpha^2+5\alpha+13)-(\alpha^2+3\alpha+9)=0,$$

$$14\alpha-27-2\beta(3+2\alpha)+\beta^2(4\alpha+5)=0.$$

可用迭代法解这两个方程。）

习 题 答 案

第 五 章

5.3 $\boldsymbol{F}=-(4/3)\pi\gamma\rho m\boldsymbol{r}$，其中字母 γ，m 的意义同5.1题。

5.4 加速度 $a=(P-Q)/M$，方向沿力 P 的方向。张力 $T=x(P-Q)/l+Q$，其中 x 为截面到力 Q 作用端的距离。

5.5 $x=53.79r$。

5.6 取水平线为 x 轴，通过质心的竖直线为 y 轴，则轨迹方程为 $x^2+y^2/4=a^2$。

5.7 设系统的质心为 O，则圆环中心的轨迹为一圆，圆心在 O，半径为 $r=ma/(m+M)$；甲虫的轨迹为一圆，圆心在 O，半径为 $R=Ma/(m+M)$。

5.8 $\Delta s=Quv_0\sin\alpha/[g(P+Q)]$。

5.10 $v=V\left[1-\frac{m(2M+m)}{(M+m)^2}\cos^2\alpha\right]^{1/2}$，其方向与水平夹角为

$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\left[\left(1+\frac{m}{M}\right)\operatorname{tg}\alpha\right]；\ U=\frac{mV\cos\alpha}{M+m}.$$

5.11 向左移动的距离为 $Q(b-a)/(P+Q)$。

5.12 $138.6N$。

5.13 $v_0+mu/(M+m)$；v_0；$v_0-mu/(M+m)$。

5.14 $I=147.4$克·厘米/秒，其方向与初速度 v_0 的夹角为 $\theta=73°40'30''$。若静止时受此打击，则速度为14.74厘米/秒，方向与冲量的方向相同。

5.15 $a=\sqrt{3}g/23$，$T=27mg/23$，$N=33\sqrt{3}mg/23$。

5.16 $T=I^2\sin^2\alpha/(ml)$。

5.18 $e=1/3$。

5.20 $\beta=\text{arc tg}\left[\dfrac{(1+e)\text{tg}\alpha}{1-e+2\text{tg}^2\alpha}\right]$.

5.21 $T=m_1m_2m_3^2(1+e)^2u^2/[l(m_1+m_2)(m_1+m_3)^2]$.

5.22 $v_1=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\cdot u$, $v_2=\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\cdot\dfrac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\cdot u$,

$$v_3=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{2m_2}{m_2+m_3}\cdot u.$$

5.23 $m_2^2=m_1m_3$, $v_3=(1+e)^2m_1u\ (m_1+2m_2+m_3)$.

5.25 当$v_0^2\leqslant 2gl$时，$h=v_0^2/2g$；当$v_0^2>2gl$时，

$$h=l\left[1-\left(\frac{W_0}{W_0+W_1}\right)^2\right]+\frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{W_0}{W_0+W_1}\right)^2.$$

5.26 绳子受到的冲量大小为$2\sqrt{3}\,mv/7$，槽的反作用冲量大小为$\sqrt{3}\,mv/7$。

5.28 $H\approx 9h$.

5.32 $\alpha=2\text{arc sin}\left[\dfrac{m_1(1+e)}{m_1+m_2}\cdot\sqrt{\dfrac{l_1}{l_2}}\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}\right]$.

5.33 $v=-V+\dfrac{Ft+M_0V}{\sqrt{A\rho(Ft^2+2M_0Vt)+M_0^2}}$，运动方程为：

$$x=-Vt+(M-M_0)/A\rho.$$

5.34 $S=\dfrac{g}{2}\left[\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{M}{\lambda}t-\dfrac{M^2}{\lambda^2}\ln\left(1+\dfrac{\lambda t}{M}\right)\right]$.

5.35 $v=\dfrac{g}{4\lambda}\left[a+\lambda t-\dfrac{a^4}{(a+\lambda t)^3}\right]$，式中$\lambda$为单位时间内雨滴半径的增量。

5.37 $\ddot{\varphi}+\dfrac{\beta}{m(t)}\dot{\varphi}+\dfrac{g}{l}\sin\varphi=0$.

5.38 $\rho(xg+v^2)$.

第 六 章

6.1 $T=[2(m_1l_1-m_2l_2)/g(m_2-m_1)]^{1/2}$。

6.2 $\Omega=-P\omega r^2/(Pr^2+Jg)$。

6.3 $\omega=(J_1\omega_1+J_2\omega_2)/(J_1+J_2)$。

6.4 圆环绕其中心转过的角度为120°（与甲虫转向相反），圆环中心绕它们的公共重心C转过240°（与甲虫转向一致）。

6.5 $\omega=\sqrt{\frac{L}{a}}\cdot \text{th}\frac{\beta t}{2}$，其中 $\beta=\frac{2\sqrt{aL}}{J}$。

6.6 运动方程：$x=x_0\text{ch}kt$，其中 $\frac{1}{k^2}=\frac{J_0g+\pi\mu r^3}{2g\mu r^2}+\frac{a}{g}$。

反力：$R_x=(2\mu rk^2/g)x_0\text{ch}kt$,

$R_y=(\pi r+2a)\mu-(4\mu k^2/g)x_0^2\text{ch}(2kt)+P$,

其中 P 是滑轮的重量。

6.7 固定一端时，角速度$\omega=\omega_0/4$，放开后杆心以速度$v_C=\omega_0l/4$作匀速直线运动，同时杆子以常角速度ω绕质心转动，其中l是杆子的半长。

6.8 $\omega'=\omega(1+2\cos\alpha)/3$。

6.9 $\theta=\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot \text{arc tg}\left(\frac{\sqrt{15}\cdot ut}{8a-3ut}\right)$。

6.10 $\omega=3M\omega_0/(3M+10m)$。

6.11 $\omega=\frac{mul(1-\cos\varphi)}{J+m(l^2+r^2+2lr\cos\varphi)}$。

6.13 $OC=\frac{1}{8\pi^2}\left[gT^2+\frac{1}{8}\sqrt{g^2T^2-\frac{2}{5}\pi^4(64r)^2}\right]$。

6.14 零或$3a/2$。

6.15 $l_1=a$，$l_2=a+2b^2/5a$。

6.16 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{2a}{3g\sin\alpha}}\approx 1.6$秒。

6.17 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{(a-b)g}}\quad(a>b)$。

6.18 $t=3a\omega_0/(4\mu g)$。

6.19 $1+mR^2/J$。

6.20 $J=\dfrac{R^2\left[\dfrac{1}{2h}(P_1-P_2)-\dfrac{1}{g}\left(\dfrac{P_1}{t_1}-\dfrac{P_2}{t_2}\right)\right]}{\left(\dfrac{1}{t_1^2}-\dfrac{1}{t_2^2}\right)}$。

6.21 $a=\dfrac{2}{3}g\sin\alpha$, $N=P\cos\alpha, F=\dfrac{1}{3}P\sin\alpha$。

6.23 实心球较快。

6.25 当 $\mathrm{tg}\alpha<3\mu$ 时作纯滚动，重心加速度为 $a=2g\sin\alpha/3$；当 $\mathrm{tg}\alpha>3\mu$时，圆柱连滚带滑，重心加速度为

$$a=g\sin(\alpha-\varepsilon)/\cos\varepsilon,$$

圆柱的角加速度为 $\ddot{\theta}=2g\mu\cos\alpha/r$，其中 $\varepsilon=\mathrm{arc\,tg}\mu$ 为摩擦角。

6.26 圆柱重心加速度$a_0=\dfrac{2}{3}\left(g\sin\alpha-\dfrac{a}{2}\right)$，方向沿斜面向下，绳中张力$T=\dfrac{1}{3}Mg\left(\sin\alpha+\dfrac{a}{g}\right)$。

6.27 角加速度 $\varepsilon=\dfrac{Q}{P}\cdot\dfrac{R-r}{R^2+k^2}\cdot g$；

柱心移动加速度为$a=\dfrac{Q}{P}\cdot\dfrac{R(R-r)}{R^2+k^2}\cdot g$；

反作用力 $F=Q\cdot\dfrac{Rr+k^2}{R^2+k^2}$。

6.28 若$Q\leqslant\mu P\cdot\dfrac{R^2+k^2}{Rr+k^2}\equiv Q_1$，则圆柱向右作纯滚动，柱心加速

度$a=\varepsilon R=\dfrac{Q}{P}\cdot\dfrac{R(R-r)}{R^2+k^2}\cdot g$；

若$Q>Q_1$，因而$Q>\mu P$，则$a_1=(Q-\mu P)g/P$，$\varepsilon_1=(\mu PR-Qr)g/Pk^2$，圆柱体向右滚动的同时向右滑动，角加速度$\varepsilon_1$(顺时针方向为正)随$Q$的增加而减小；

当$Q=Q_2\equiv\mu PQ/r>Q_1$时，$\varepsilon_1=0$；

如果$Q>Q_2$时，则角加速度为逆时针方向。

6.29 （1）圆柱重心加速度$a=Ag[mr^2\sin\alpha+(M\sin\alpha-m)k^2]$，

圆柱角加速度$\varepsilon=2Amgr\cos^2(45°-\alpha/2)$；

绳中张力$T=2AMmgk^2\cos^2(45°-\alpha/2)$；

重物加速度$a_1=Ag[mr^2-(M\sin\alpha-m)k^2]$，

其中$1/A=(M+m)k^2+mr^2$。

（2）圆柱仅有转动的条件为

$$\frac{m}{M}=\frac{k^2\sin\alpha}{k^2-r^2\sin\alpha},$$

因此$k^2>r^2\sin\alpha$，在均质圆柱体的条件下，得$\alpha<30°$。

（3）重物不动的条件为

$$\frac{m}{M}=\frac{k^2\sin\alpha}{k^2+r^2},$$

绳中张力$T=mg$。

6.30 $I_x=Mv_0\sin\alpha$，$I_y=\dfrac{1}{3}Mv_0(1-\cos\alpha)$，

其中$\cos\alpha=1-\dfrac{h}{r}$；

不产生滑动的条件是$\mu>(1-\cos\alpha)/(3\sin\alpha)$。

6.32 $v>\sqrt{8(\sqrt{2}-1)ga/3}\approx3.29$米/秒。

6.33 $v_B=6I/7M$，方向与I相反；$v_C=24I/7M$，方向与I相同。

6.37 进动角速度为1.09 1/秒。

6.38 陀螺力矩大小为161公斤米。

6.39 8.66秒。

6.40 $Q=J\omega\Omega\sin\varphi/a$。

第 七 章

7.1 5200公斤。

7.2 50人。

7.3 约43.8吨。

7.4 12小时15分钟。

7.6 $T=\frac{1}{4}\pi\rho\omega^2R^4\left(H-\frac{h}{3}\right)$。

7.7 $T=\frac{1}{2}r^2\omega^2\left\{\frac{m_1}{3}+m_2\left[\sin\varphi+\frac{r}{2l}\cdot\frac{\sin2\varphi}{\sqrt{1-(r\sin\varphi/l)^2}}\right]\right\}$。

7.8 $T=\frac{pV^2}{2g}\left[1+2\left(\frac{\pi r}{h}\right)^2\right]$。

7.9 $\omega_0=\sqrt{3g/l}$。

7.10 $\omega=\frac{2}{r}\sqrt{\frac{Pgh}{2P+Q}}$。

7.11 （1） $T_1=2\pi\sqrt{l/g}$，如 BD 杆的初始角速度为 ω_0，则在运动过程中 BD 杆保持角速度 ω_0 不变，AC 杆以 T_1 周期摆动；

（2） $T_2=4\pi\sqrt{l/3g}$。

7.12 $\omega=[4g(\pi M-2Fr)/(Jg+Pr^2\sin^2\varphi_0)]^{1/2}$。

7.13 $s=\frac{v_0^2}{\mu g}\left(\frac{5}{2}+2\mu\,\mathrm{tg}\alpha\right)$。

7.14 $a=\frac{2(M+m)r^2g}{M(R^2+2r^2)+3mr^2}$，$T=\frac{(M+m)(MR^2+mr^2)g}{2[M(R^2+2r^2)+3mr^2]}$。

7.15 $a=\frac{2(2m-M)r^2g}{J+4J_1+(M+4m)r^2}$.

7.16 $\omega=\frac{2}{r_1+r_2}\cdot\sqrt{\frac{3gL\varphi}{9P+2Q}}$.

7.17 $\alpha=\arccos(4/7)\approx55°9'$, $\omega=2\sqrt{g/7r}$.

7.18 $\omega=\left[\frac{2ag(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}{r^2+a^2+k^2-2ar\cos\varphi}\right]^{1/2}$.

7.19 $\theta_{min}=\arccos(\sqrt{n^2+1}-n)$，式中$n=a\omega_0^2/6g$。

7.20 （1） $r=\sqrt{a^2+n^2t^2}$， $\theta=\frac{u}{n}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{nt}{a}$，

式中 $n=u\sqrt{m_1/(m_1+m_2)}$。

（2） $T=a^2n^2m_2/r^3$。

7.21 $\Omega=(\mu u/r)\cos\alpha$, $V=u[1-\mu(2-\mu)\cos^2\alpha]^{1/2}$，式中

$u=\sqrt{\frac{2gnh}{(1-\mu\cos^2\alpha)}}$， $\alpha=\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{h}{2\pi r}\right)$， $\mu=\frac{m}{M+m}$。

7.22 $\alpha=\mathrm{arc\,tg}(\mathrm{tg}\varphi/10)$，式中 φ 是杆和竖直线所成的角度。

7.23 $v=(x^2-x_0^2)g/l$。

7.24 $v=[gr(2-2\cos\theta+\theta^2)/\pi]^{1/2}$。

7.25 运动微分方程： $\ddot{x}+\frac{x\dot{x}^2}{l^2-x^2}+\frac{3g}{2l^2}(l^2-x^2)=0$， 式中 l 为

杆长；落地速度 $v=\sqrt{3gh}$。

7.26 $\alpha=\mathrm{arc\,tg}(1/2)\approx26°34'$。

7.28 $\varphi_{max}=2\varphi_0$。

7.30 $t:t_1=\sqrt{1-2/(7n^5)}$， $s:s_1=t_1^2:t^2$，式中$n=R/r$。

7.31 $\alpha=2\arcsin\left[\frac{mv_0\sqrt{3/(2gl)}}{\sqrt{(M+m)(4M+3m)}}\right]$。

7.32 $a_1=4mg/(3M+8m)$，$a_2=2a_1$，

$T=3Mmg/(3M+8m)$.

7.33 $t=(3M+8m)r\Omega/4mg$.

7.34 两碎片的速度分别为 $V\pm\sqrt{2KE/M}$ 和 $V\mp\sqrt{2E/KM}$，小块在前取上面的正负号，反之取下面的正负号。

7.35 杆中心的运动轨迹的方程是 $y^2=2lx-3l^2$；角速度 $\omega=\sqrt{3g/2l}$。

7.36 $\omega_0=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\left[6+\frac{\pi^2(2k+1)^2}{(2k+1)\pi+2}\right]^{1/2}$，$k=0,1,2,\cdots$。

7.37 $a=2g/3$， $\varepsilon=2g/3r$， $T=P/3$。

7.38 （1） $\omega_1=\frac{2P_2gt}{r_1(3P_1+2P_2)}$， $\omega_2=\frac{2P_1gt}{r_2(3P_1+2P_2)}$；

（2）$s=\frac{(P_1+P_2)gt^2}{(3P_1+2P_2)}$， （3） $T=\frac{P_1P_2}{3P_1+2P_2}$。

7.39 $a=\frac{mg\sin2\alpha}{3(M+m)-2m\cos^2\alpha}$， $\varepsilon=\frac{2(M+m)g\sin\alpha}{r[3(M+m)-2m\cos^2\alpha]}$，

其中 r 为圆柱的半径。

7.41 $a=4g\sin\varphi/7$， $N=mg\sin\varphi/7$（压力）。

7.42 $a=3g/32$， $\varepsilon=g/16r$。

7.45 $v=2\left(\frac{Mh}{m}+a\right)\cdot\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$。

7.46 $s=3lM^2/[2\mu(M+3m)^2]$。

7.47 最大距离 $d=(1+\sqrt{11})a/5$。

7.48 $a_A=a_B=3mg/(9M+4m)$， $\varepsilon=\sqrt{2}\,a_A/l$。

7.49 相对速度 $v_r=2[(M+m)gl/(4M+m)]^{1/2}$。

7.50 $v_C=V\cos2\alpha/(1+2\sin^2\alpha)$。

7.59 $H>(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_1+m_2+2m_3)g/(2m_3^2k)$。

7.60 杆不会跳起来。

7.62 $N=3(2+\cos^2\alpha)Mg/[2(3-\cos^2\alpha)]$。

7.63 $N=80mg/49$。

7.70 $\omega=\sqrt{3g/5a}$。

7.72 $R=mg(2k\theta+7\cos\theta-4)/3$。

7.74 板端下落速度比小球快，小球自由下落。

7.77 $I'=\frac{3}{8}m\sqrt{2gh}\cdot\sin2\alpha$；

7.78 （2）$T=\frac{28}{3}ma^2\omega^2$；（3）$I=\frac{28}{3}ma\omega$。

7.79 $R=9I^2/ma$，方向沿 $\overrightarrow{AB}$。

第 八 章

8.1 $T=2\pi\sqrt{l/(g-a)}$。

8.2 相对加速度$a_r=g\sin\alpha-a\cos\alpha$；
绝对加速度$w=\sin\alpha\sqrt{a^2+g^2}$；
绝对轨迹为一直线，其方程为 $Ax-By=0$，其中
$A=(g\sin\alpha-a\cos\alpha)\sin\alpha$，$B=(g\cos\alpha+a\sin\alpha)\sin\alpha$；
坐标原点取在小球的初始位置 M_0，x 轴与 a 同向，y 轴竖直向下；
斜面反力 $N=P(\cos\alpha+a\sin\alpha/g)$。特殊情况：
（1）轨迹方程：$y=0$，反力 $N=P/\cos\alpha$，
（2）轨迹方程：$x=0$，反力 $N=0$。

8.3 约287公斤。

8.4 钢丝形状为抛物线，方程为 $y=\omega^2x^2/2g$；
反力 $N=P\sqrt{1+2\omega^2y/g}$。

8.6 ≈0.5厘米。

8.7 振幅≈0.04厘米；$n_{临界}$≈945转/分。

8.8 $s=a(2-\cos\omega t)$。

8.9 相对运动轨迹为一圆，其方程为：

$$\left(\xi-\frac{4c}{3}\right)^2+\eta^2=\left(\frac{4c}{3}\right)^2.$$

绝对轨迹的方程为$r=\frac{8c}{3}\cos\frac{\theta}{3}$，其中$\theta=\frac{3}{2}\omega t$。

8.10 $\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)\ddot{x}+\frac{x}{4a^2}\dot{x}^2-\left(\omega^2+\frac{g}{2a}\right)x=0$。

8.11 $r=a\operatorname{ch}\omega t+\frac{1}{\omega}\left(v_0-\frac{g}{2\omega}\right)\operatorname{sh}\omega t+\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$。

8.12 $r=\frac{a}{2b}\left[(b+\mu)e^{(b-\mu)\omega t}+(b-\mu)e^{-(b+\mu)\omega t}\right]$，

其中$b=\sqrt{1+\mu^2}$。

8.13 折合长度$l_0=gb/a\omega^2$。设φ角为OA和AB的夹角，则内力为

$$N=mb\dot{\varphi}^2+m\omega^2(a\cos\varphi+b)+2m\omega b\dot{\varphi},$$

其中$\dot{\varphi}^2=\dot{\varphi}_0^2+2a\omega^2(\cos\varphi-\cos\varphi_0)/b$。

8.15 当$\omega\leqslant\sqrt{3g/l}$时，平衡位置为$\alpha=0$，不振；当$\omega>\sqrt{3g/l}$时，稳定平衡位置为$\alpha=\arccos(3g/l\omega^2)$。

振动周期$T=\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{5l^2\omega^4-36g^2}{l^2\omega^4-9g^2}}$。

8.16 $\ddot{\theta}-\omega^2\sin\theta\cos\theta-\frac{3g}{4a}\sin\theta=0$。平衡位置$\theta=0$（不稳定的）。

8.17 当$k>\frac{mg}{2l}+\frac{1}{3}m\omega^2$时，有两个平衡位置：$\alpha=0$是稳定的，另一个是不稳定的；

当$k<\frac{mg}{2l}+\frac{1}{3}m\omega^2$时，只有一个不稳定的平衡位置$\alpha=0$。

在稳定平衡位置附近微振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2ml}{6kl-2ml\omega^2-3mg}}.$$

8.18 质点作半径为 $v_0/(2\omega\sin\lambda)$ 的等速圆周运动。

8.20 偏西 $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\cdot\omega\cos\lambda$，$\lambda$ 为当地纬度。

8.21 $s=\frac{1}{3}\omega g t^3\cos\lambda-\omega v_0 t^2\sin(\alpha-\lambda)$。

8.25 椭圆方程为

$$\frac{1}{4}\left(x-\frac{2v_0}{\omega}\right)^2+y^2=\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2,$$

其中 ω 是飞船的转动角速度，坐标原点取在飞船上，x 轴指向飞船的飞行方向，y 轴指向地心。

第 九 章

9.4 主惯量为

$J_1=20ma^2$，$J_2=2(10+\sqrt{5})ma^2$，$J_3=2(10-\sqrt{5})ma^2$；

相应的主轴方向为 $\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$，

$$\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\sqrt{5}\,\boldsymbol{k}),\quad \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{10}}(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\sqrt{5}\,\boldsymbol{k}).$$

9.6 $\frac{ma^2}{6}\cdot\frac{6a^2+5h^2}{4a^2+h^2}$。

9.7 $\frac{3ma^2}{20}\cdot\frac{a^2+6h^2}{a^2+h^2}$。

9.8 $h=2a$。

9.9 $J_u=\frac{m}{6}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$，　$J_{uv}=\frac{mab}{12}\cdot\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$，

$$J_v=\frac{m}{12}\cdot\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}.$$

9.11 $N=2750$公斤。

9.12 $N=(700\pm79)$公斤。

9.13 $\Omega=2\omega$。

9.18 $N=(J_3-J_1)\omega^2\sin2\theta/2l$。

9.19 $F\approx P^3a^3\sin\theta/(J_3^2g\omega^2)$。

9.21 $\theta=\text{arc ctg}(2\text{tg}\alpha)$， $\Omega=\omega\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$。

9.27 $\omega_1=\frac{2}{3}\Omega(\cos\theta-\sin\theta)$，$\omega_2=\frac{2}{3}\Omega(\cos\theta+\sin\theta)$，$\omega_3=\frac{\Omega}{3}$，

其中$\theta=\Omega t/5$。此时角速度在OA方向的投影为

$$\frac{\Omega}{9}(1+8\cos\theta)。$$

9.29 $\omega_1=n\,\text{sech}(\sqrt{5}\,nt)$， $\omega_2=-\sqrt{5}\,n\,\text{th}(\sqrt{5}\,nt)$，$\omega_3=3\omega_1$。

9.32 $v_B=(24u+5a\Omega)/29$，方向与$\boldsymbol{u}$相同。

9.33 $T=7I^2/2m$，$\boldsymbol{v}_B=-\boldsymbol{I}/m$，$\boldsymbol{v}_C=-7\boldsymbol{I}/m$。

9.34 $\boldsymbol{\omega}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$，反力$\boldsymbol{R}=\frac{3}{20}mh\Omega^2(2\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})$。

第 十 章

10.1 $$\begin{cases}\ddot{\theta}-\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta-g\sin\theta/l=0,\\ \ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta=0.\end{cases}$$

10.2 取摆线和竖直线的夹角θ为广义坐标，则方程为

$$(l+a\theta)\ddot{\theta}+a\dot{\theta}^2+g\sin\theta=0。$$

10.4 取弹簧长度r和弹簧轴线与某一固定直线的夹角θ为广义坐标，则运动微分方程为

$$\begin{cases}m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2-mR\omega^2\cos(\varphi-\theta)+k(r-a)=0,\\ r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-R\omega^2\sin(\varphi-\theta)=0,\end{cases}$$

其中$\varphi=\varphi_0+\omega t$，是半径 OA 与固定直线的夹角。

10.5 运动微分方程为

$$l\ddot{\theta}+A\omega^2\sin\omega t\sin\theta-g\sin\theta=0.$$

10.6 如果$t=0$时，$\varphi=\varphi_0$，$\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0$，则张力为

$$N=3mg\cos\varphi+ml\dot{\varphi}_0^2-2mg\cos\varphi_0.$$

10.7 $l\ddot{\theta}-\frac{v^2}{a}\cos(\varphi-\theta)+g\sin\theta=0$，其中$\varphi=\frac{vt}{a}+\varphi_0$。

10.8 $v=\sqrt{gz}$，z 为锥顶到质点运动平面的距离。

10.10 $L=Pr\sin(\varphi+\psi)/\cos\psi$。

10.11 nQ。

10.12 椭圆柱面：$x^2+(2y-a)^2=a^2$。

10.13 当$2p\geqslant a$时，只有一个平衡位置$\theta=0$；

当$2p<a$时有两个平衡位置：$\theta=0$ 和 $\theta=\arccos\sqrt{2p/a}$。

10.14 $M=Pa\,\mathrm{tg}2\theta$。

10.15 $N_{AC}=\sqrt{5}P$，　$N_{BC}=0$。

10.16 $N_{CD}=-\sqrt{3}P/2$。

10.20 绳中张力 $T=w\,\mathrm{tg}\theta/2\sqrt{3}$。

10.21 $\mathrm{tg}\varphi=[(P+Q)\cos\alpha+2R\rho g\sin\alpha]/[(P-Q)\sin\alpha]$。

10.24 $a=[P(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-Q(\sin\beta+\mu\cos\beta)]g/(P+Q)$。

10.26 $5mg/2$。

10.29 $\omega<\sqrt{2\pi F/mr}$。

10.31 $T=2\pi\sqrt{(M+m)/k}$。

10.32 $l(\cos^2\beta+1/5)\ddot{\theta}+g\sin\alpha\sin\theta=0$。

10.33 $\theta=\theta_0+c\,\mathrm{arc\,tg}\left[\frac{ut}{\sqrt{R^2-a^2+\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)}}\right]$，

其中 θ_0 和 c 是积分常数，由初条件决定。

10.34 $(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\ddot{\theta}+R\omega^2(m_1l_1-m_2l_2)\cos(\theta-\omega t)=0$。

当$m_1l_1=m_2l_2$时，任意位置都是平衡位置；
当$m_1l_1\neq m_2l_2$时，AB杆与OC杆重合的位置是平衡位置。

10.35
$$\begin{cases}(m+M/2)R^2\ddot{\varphi}+mRl\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta)\\ \qquad\qquad +mRl\dot{\theta}^2\sin(\varphi-\theta)+mgR\sin\varphi=0,\\ l\ddot{\theta}+R\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\theta)-R\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\theta)+g\sin\theta=0.\end{cases}$$

10.42 $a_A=\dfrac{g}{35}$，$a_O=-\dfrac{g}{35}$，$a_B=\dfrac{11}{35}g$，$a_C=-\dfrac{13}{35}g$，

其中负号表示加速度向上。

10.44
$$\begin{cases}m[\ddot{\xi}-a\ddot{\varphi}\sin(\varphi-\theta)-a\dot{\varphi}^2\cos(\varphi-\theta)-(\xi+l)\dot{\theta}^2]\\ \qquad =-k\xi+mg\cos\theta+X\sin\theta+Y\cos\theta,\\ m[(\xi+l)^2\ddot{\theta}+2(\xi+l)\dot{\xi}\dot{\theta}+a\ddot{\varphi}(\xi+l)\cos(\varphi-\theta)\\ \quad -a\dot{\varphi}^2(\xi+l)\sin(\varphi-\theta)]\\ \qquad =-mg(\xi+l)\sin\theta+X(\xi+l)\cos\theta\\ \qquad\qquad -Y(\xi+l)\sin\theta,\\ m\{\frac{4}{3}a\ddot{\varphi}+[2\dot{\xi}\dot{\theta}+(\xi+l)\ddot{\theta}]\cos(\varphi-\theta)+[(\xi+l)\dot{\theta}^2\\ \quad -\ddot{\xi}]\sin(\varphi-\theta)\}\\ \qquad =-mg\sin\varphi+2(X\cos\varphi-Y\sin\varphi).\end{cases}$$

10.52 $v_A=\dfrac{I}{m_1+m_2}+\dfrac{3I}{m_1}$，$v_B=-\dfrac{2I}{m_1+m_2}$，$v_C=\dfrac{I}{m_1+m_2}$，

其中正号表示与I同向，负号为反向。

10.56 $\omega_1=\omega_3=\omega$，　$\omega_2=\omega_4=2\omega/5$。

10.58 当$r<R$时为稳定平衡位置；$r\geqslant R$时为不稳定平衡位置。

10.60 $T=2\pi\sqrt{ml/(2kl-mg)}$。

10.62 运动微分方程为

$$\begin{cases} m(2\ddot{x}-a\ddot{\theta}\cos\theta+a\dot{\theta}^2\sin\theta)=F, \\ 4a\ddot{\theta}-3\ddot{x}\cos\theta=-3g\sin\theta. \end{cases}$$

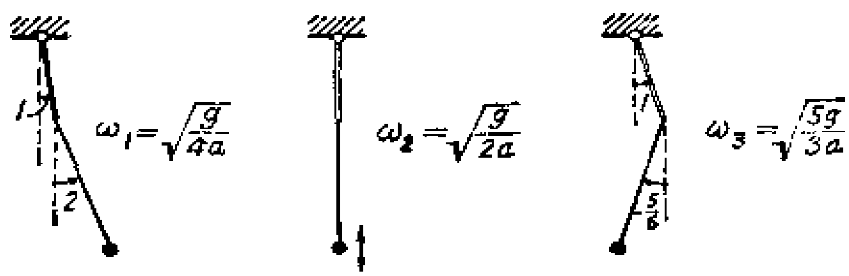
10.63 系统的动能

$$T=2ma^2(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}M[\dot{\xi}^2+(\xi^2+2a\xi\cos2\theta+a^2)\dot{\theta}^2$$

$$+2a\dot{\xi}\dot{\theta}\sin2\theta+(\xi+a)^2\omega^2\sin^2\theta].$$

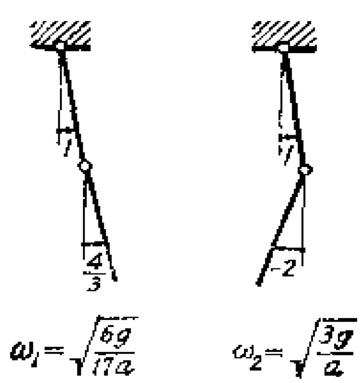
10.65 主频率及对应的振型如图所示，对应单摆的折合长度分别为$l_1=4a$，$l_2=2a$，$l_3=3a/5$。

简正坐标为$q_1=\xi$，$q_2=2\theta-\varphi$，$q_3=5\theta+6\varphi$。

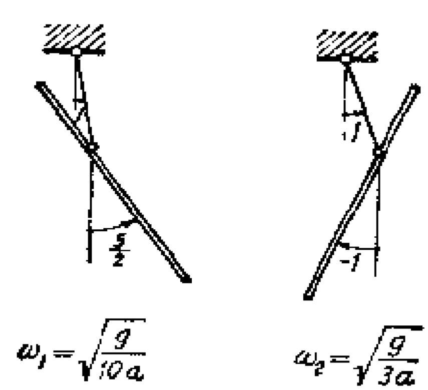


答题 10.65 图

10.66 主频率及对应的振型如图所示。



答题 10.66 图



答题 10.67 图

10.67　主频率及对应的振型如图所示。

10.68　取车厢重心在垂直方向离开平衡位置的位移为 y，车厢与水平面的夹角为 θ，则运动方程为

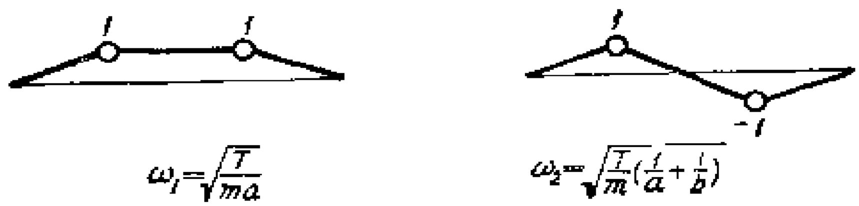
$$y=A\sin(\omega_1 t+\alpha),\qquad \theta=B\sin(\omega_2 t+\beta).$$

其中 A,B,α,β 为积分常数，

$$\omega_1=\sqrt{2kg/Q},\qquad \omega_2=\sqrt{2kgl^2/\rho^2 Q}.$$

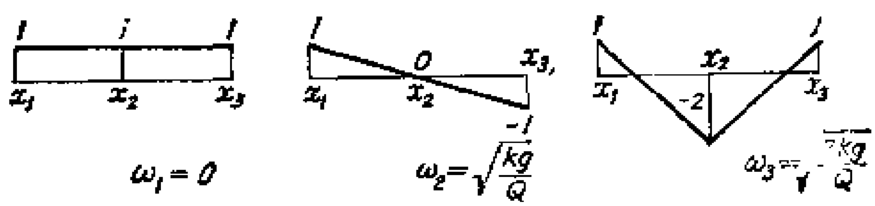
10.69　主频率及振型如图所示。

简正坐标为$q_1=x_1+x_2$，$q_2=x_1-x_2$，其中x_1，x_2为点A，B离开平衡位置的距离。



答题 10.69 图

10.70　主频率和对应的振型如图所示。



答题 10.70 图

运动方程为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{3}x_0-\dfrac{1}{2}x_0\cos\omega_2 t+\dfrac{1}{6}x_0\cos\omega_3 t, \\ x_2=\dfrac{1}{3}x_0-\dfrac{1}{3}x_0\cos\omega_3 t, \\ x_3=\dfrac{1}{3}x_0+\dfrac{1}{2}x_0\cos\omega_2 t+\dfrac{1}{6}x_0\cos\omega_3 t. \end{cases}$$

10.71 取转动角速度沿 Z 轴方向，力场的势能为 $V(x,y,z)$，则有

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)-\omega(xp_y-yp_x)+V(x,y,z).$$

10.73 $\omega^2=(3g/2l)(\sin\theta_0-\sin\theta)$.

10.74 加速度$a=(2g/3)(5-8\cos\theta+3\cos^2\theta)^{1/2}$.

10.75 $\omega=\sqrt{3g/(4l)}$.

10.76 $\tau=2\pi\sqrt{J/(mgl)}$.

10.77 不唯一.

10.78 精确值为(1.1395,1.7092)；近似值为(1.1389,1.7083).

10.79 (ρ,φ)的精确值为(2.2070,0.6088)；近似值为(2.2076,0.6067).

索 引

B

C

D

F

G

H

J

K

L

M

O

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z